



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral
para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

en el campo de **Análisis Armónico**

Título:

Funciones distancia, pesos de Muckenhoupt y porosidad de conjuntos

Autor:

Ignacio Javier Gómez Vargas

Institución donde se realizó la investigación:

**Instituto de Matemática Aplicada del Litoral “Dra. Eleonor Harboure”
(CONICET – UNL)**



CONICET



I M A L

Director de Tesis: **Hugo Aimar**

Codirectora de Tesis: **Ivana Gómez**

Jurado titular compuesto por:

Dra. Irene Drelichman, Dr. Diego Maldonado, Dr. Carlos Mudarra

Año de presentación: **2026**

Resumen

En esta tesis se considera el problema general de determinar cuándo E , subconjunto de un espacio cuasi-métrico X , es tal que una dada potencia de su función distancia está contenida en alguna de las clases de pesos de Muckenhoupt. Las funciones que son objeto principal de estudio resultan por tanto de la forma $x \mapsto \text{dist}(x, E)^\theta$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y son denominadas *pesos distancia*. Aquí, la distancia se halla supeditada a una cuasi-métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, mientras que tanto las características del espacio X así como la clase específica de pesos de Muckenhoupt a considerar se verán modificados en función de los tres escenarios principales abordados a lo largo de esta exposición; detallados en los párrafos siguientes. En general, la condición a imponerse sobre los conjuntos E es del tipo geométrica y asociada particularmente a ciertas nociones de *porosidad*. Por este motivo, los temas inherentes a este trabajo yacen en la intersección del análisis armónico y la teoría geométrica de la medida.

El primer escenario considerado consiste en la caracterización de los conjuntos $E \subseteq X$ que admiten pesos distancia en la clase $A_1(X, d, \mu)$ de Muckenhoupt, donde (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo. Como resultado de esta exploración, se obtendrá una caracterización geométrica completa de todos estos subconjuntos, dando lugar al concepto de conjuntos *débilmente porosos*. Esta condición de porosidad débil en espacios de tipo homogéneo generaliza a la obtenida en los trabajos pioneros de A. V. Vasin (para subconjuntos de la circunferencia unitaria), T. C. Anderson, J. Lehrbäck, C. Mudarra & A. V. Vähäkangas (subconjuntos de $\mathbb{R}^n$) y C. Mudarra (subconjuntos de espacios métricos con medidas duplicantes). Más aún, las demostraciones presentadas en esta tesis se basan en un enfoque original que depende de una construcción debida a R. Macías & C. Segovia, a diferencia de los anteriores enfoques basados en sistemas diádicos.

En segundo lugar, consideramos el problema de caracterización de subconjuntos de un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) que admiten pesos distancia en las clases $A_p(X, d, \mu)$ para $p > 1$. Una primera caracterización es presentada para describir este tipo de subconjuntos bajo las hipótesis mencionadas, pero es en el caso especial de $X = \mathbb{R}^n$ donde se obtiene una caracterización más elegante y reminiscente de la hallada en el caso $p = 1$. En este ambiente euclídeo se introduce una nueva clase de conjuntos, dando lugar a una condición geométrica que no solo resulta ser más laxa que la anterior, sino que también es apropiada para describir la condición A_p de los pesos asociados. Estos resultados fueron los primeros en establecer una equivalencia entre la condición geométrica impuesta al conjunto E y la condición A_p de sus pesos distancia. Cabe destacar que los autores M. Pasquariello & I. Uriarte-Tuero obtuvieron posteriormente resultados similares.

En última instancia, se aborda el problema de caracterización de subconjuntos de la recta cuyos pesos distancia pertenecen a alguna de las clases laterales de pesos $A_1^-(\mathbb{R})$ o $A_1^+(\mathbb{R})$. En este caso, la relativa simplicidad de trabajar en una geometría elemental como la de $\mathbb{R}$ contrasta con la complejidad que supone tratar con las versiones laterales de la condición $A_1(\mathbb{R})$. Aún así, se introducen las nociones de conjuntos *débilmente porosos por izquierda* y *débilmente porosos por derecha* y se demuestra que estas condiciones son equivalentes a la pertenencia a las clases laterales de los pesos distancia. Más aún, se verifica que un conjunto E es débilmente poroso en el sentido usual si y solo si cumple de forma simultánea con ambas variantes laterales y se presentan ejemplos de conjuntos en cada una de estas clases.

Abstract

This thesis addresses the problem of characterizing those subsets E of a quasi-metric space X such that a given power of their distance function belongs to a Muckenhoupt weight class. The functions under consideration have therefore the expression $x \mapsto \text{dist}(x, E)^\theta$ with $\theta \in \mathbb{R}$ and are referred to as *distance weights*. Here, the distance is taken with respect to a quasi-metric $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, while both the nature of the space X and the specific Muckenhoupt class under consideration vary according to the three main settings studied throughout this work, which are described in the following paragraphs. In general, the condition imposed on the sets E is geometric in nature and is particularly related to certain notions of *porosity*. For this reason, the topics discussed in this thesis lie at the intersection of harmonic analysis and geometric measure theory.

The first setting considered consists of the characterization of subsets $E \subseteq X$ that admit distance weights in the Muckenhoupt class $A_1(X, d, \mu)$, where (X, d, μ) is a space of homogeneous type. As a result of this study, a complete geometric characterization of such subsets is obtained, leading to the notion of *weakly porous* sets. This weak porosity condition in spaces of homogeneous type extends those obtained in the pioneering works of A. V. Vasin (for subsets of the unit circle), T. C. Anderson, J. Lehrbäck, C. Mudarra & A. V. Vähäkangas (for subsets of $\mathbb{R}^n$), and C. Mudarra (for subsets of metric spaces with doubling measures). Moreover, the proofs presented in this thesis rely on an original approach based on a construction due to R. Macías & C. Segovia, in contrast to previous approaches relying on dyadic systems.

In second place, we consider the problem of characterizing subsets of a space of homogeneous type (X, d, μ) admitting distance weights in the classes $A_p(X, d, \mu)$ for $p > 1$. A first characterization is provided under the above hypotheses; however, in the special case $X = \mathbb{R}^n$, a more complete characterization is obtained, reminiscent of the one found in the case $p = 1$. In this Euclidean setting, a new class of sets is introduced. This new condition is not only geometrically weaker than the previous one, but is also appropriate for describing the A_p condition of the associated distance weights. These results were the first to establish an equivalence between the geometric condition imposed on the set E and the A_p condition for its distance weights. It is worth mentioning that M. Pasquariello & I. Uriarte-Tuero later obtained similar results.

Finally, we address the problem of characterizing subsets of the real line whose distance weights belong to one of the one-sided Muckenhoupt classes $A_1^-(\mathbb{R})$ or $A_1^+(\mathbb{R})$. In this case, the relative simplicity of working within the elementary geometry of $\mathbb{R}$ contrasts with the technical difficulties arising from the one-sided versions of the $A_1(\mathbb{R})$ condition. Nevertheless, the notions of *weakly porous to the left* and *weakly porous to the right* sets are introduced, and it is shown that these conditions are equivalent to the inclusion of distance weights in the corresponding one-sided classes. Furthermore, it is verified that a set E is weakly porous in the usual sense if and only if it simultaneously satisfies both one-sided variants, and examples of sets in each of these classes are provided.

Índice general

Introducción	10
Notación	18
1 Pesos distancia en la recta	21
1.1 Sobre los pesos distancia en $\mathbb{R}^n$	21
1.2 Una primera mirada a la porosidad débil	23
1.3 Resolución del Problema 1.1 en la recta	26
1.4 Pesos distancia A_p en la recta: el caso $p > 1$	33
2 Espacios de tipo homogéneo	39
2.1 Espacios uniformes	39
2.2 Métricas y cuasi-métricas	44
2.3 Nociones de dispersión y lemas de cubrimiento en espacios cuasi-métricos	53
2.4 Espacios de tipo homogéneo	55
2.5 Dimensiones de Hausdorff y Minkowski	60
2.6 La cuasi-métrica de Macías y Segovia	62
3 Pesos de Muckenhoupt y pesos distancia en espacios de tipo homogéneo	68
3.1 Maximal de Hardy-Littlewood	68
3.2 Acotación de la maximal con pesos y clases de Muckenhoupt	71
3.3 Pesos distancia en espacios de tipo homogéneo	77
3.4 Antecedentes en el estudio de pesos distancia	82
4 Caracterización de pesos distancia A_1 sobre espacios de tipo homogéneo	86
4.1 Función de poro maximal	86
4.2 Primeras nociones de porosidad	90
4.3 Porosidad débil en espacios de tipo homogéneo	92
4.4 La condición A_1 del peso implica porosidad débil	100
4.5 La porosidad débil como condición suficiente	103
5 Caracterización de pesos distancia A_p en $\mathbb{R}^n$ y en espacios de tipo homogéneo	115
5.1 Medidas de distribución de poros	115
5.2 Primera caracterización para pesos distancia A_p	124
5.3 Segunda caracterización para pesos distancia A_p	127
5.4 Equivalencia de la segunda caracterización con la condición de porosidad en medianas	132
5.5 Pesos distancia A_p en espacios de tipo homogéneo	138
5.6 Ejemplos	145

6 Caracterización de pesos distancia laterales	156
6.1 Operadores maximales y pesos en el contexto lateral	156
6.2 Porosidad débil lateral	163
6.3 Relación entre porosidad y pesos laterales	170
Conclusiones	179
Problemas abiertos y trabajo futuro	181
Bibliografía	184

Introducción

Esta tesis abarca, en gran parte, la búsqueda y caracterización de los subconjuntos E de un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) para los cuales cierta potencia $\theta \in \mathbb{R}$ de su función distancia asociada $x \mapsto \text{dist}(x, E)^\theta$ pertenece a alguna de las clases de pesos de Muckenhoupt. Más allá del aporte en sí mismo que esto representa para desentrañar aspectos desconocidos de esta clase de pesos tan importante, lo cierto es que existen aplicaciones concretas de este tipo de resultados dentro de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y de espacios de Sobolev. Por este motivo, y con el fin de evitar una introducción imprudentemente rauda al problema mencionado, comenzaremos por la sutil tarea de justificar el porqué, ante todo, merece la pena considerarlo.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio abierto. En lo que sigue, denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ al espacio de Sobolev formado por las funciones $u \in L^p(\Omega)$ cuyas derivadas débiles $D^\alpha u$ de orden $|\alpha| \leq k$ pertenecen también a $L^p(\Omega)$; dotándolo de la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

El subespacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ se define como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ (el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω) en la norma de $W^{k,p}(\Omega)$. En el caso particular $p = 2$ y $k = 1$, escribimos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. Finalmente, $H^{-1}(\Omega)$ denota el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$, es decir, el conjunto de funcionales lineales continuos sobre $H_0^1(\Omega)$.

En lo que concierne a la teoría de EDP, el modelo clásico para describir la evolución de un fluido viscoso e incompresible, contenido en un recipiente representado por la frontera $\partial\Omega$ de un dominio abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, consiste en el sistema de ecuaciones de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{F} & \text{en } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

donde las incógnitas $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representan, respectivamente, la velocidad y presión del fluido mientras que $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la fuerza aplicada¹. La condición $\text{div } \mathbf{u} = 0$ en Ω modela la situación de flujo incompresible sobre la totalidad del dominio, mientras que $\mathbf{u} = 0$ en $\partial\Omega$ restringe al fluido a mantenerse inmóvil en el borde del recipiente.

La existencia de soluciones $(\mathbf{u}, p)$ para el sistema (0.1) está sujeta al nivel de regularidad tanto del conjunto Ω como de la función $\mathbf{F}$. Por ejemplo, si $\mathbf{F} \in H^{-1}(\Omega)^n$ y Ω es lo que se conoce como un *dominio Lipschitz*, entonces se sabe que existe una única solución $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$, donde $L_0^q(\Omega)$ denota a las funciones de $L^q(\Omega)$ con valor medio nulo; más aún, se cumple la desigualdad en normas $\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\Omega)}$ para cierta constante $C > 0$ [BS94; BF91; GR86; Tem84]. La demostración de dicha existencia y unicidad procede mediante la solución previa del problema

$$\text{div } \mathbf{u} = f \quad \text{en } \Omega, \quad (0.2)$$

por lo que estudiar esta ecuación en sí resulta de sumo interés. Manteniendo la hipótesis Lipschitz sobre el dominio Ω , la existencia de soluciones para (0.2) con la propiedad que $\|\mathbf{u}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq$

¹Por supuesto, el caso físicamente interesante ocurre al considerar $n = 3$.

$C\|f\|_{L^p(\Omega)}$ fue demostrada en [ADM06]. Nótese que, entendiendo a la divergencia como un operador entre los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)^n$ y $L_0^p(\Omega)$, lo anterior equivale a asegurar la existencia de un operador inverso y continuo por derecha.

En su tesis doctoral [Lóp10], F. López García se dedicó a estudiar la existencia de soluciones de la ecuación (0.2) (o, equivalentemente, la existencia de un inverso continuo del operador divergencia) para dominios del tipo Hölder- α (aún más generales que los de tipo Lipschitz) incluyendo pesos sobre los espacios funcionales de $\mathbf{u}$ y f . Para comprender mejor la geometría de todos los dominios mencionados hasta el momento, consideremos las siguientes definiciones. Dado $\alpha \in (0, 1]$, diremos que un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una α -cúspide si existen $r, s > 0$ tales que, en algún sistema de coordenadas ortogonales $(x_1, \dots, x_n)$, se tiene que

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : 0 < x_n < r \wedge |\mathbf{x}'| < s x_n^{\frac{1}{\alpha}}\}.$$

Con esto, un conjunto Ω es un dominio Hölder- α si para todo punto $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ existen una α -cúspide $\mathcal{C}$ y un entorno U de $\mathbf{x}_0$ tales que $\mathbf{x} + \mathcal{C} \subseteq \Omega$, para todo $\mathbf{x} \in U \cap \bar{\Omega}$. En el caso particular $\alpha = 1$, una α -cúspide se denomina asimismo *cono* y un conjunto de tipo Hölder-1 pasa a llamarse de tipo Lipschitz. De esta manera, los conjuntos Hölder- α generalizan a los Lipschitz por la posibilidad de presentar cúspides de tipo potencia en su frontera.

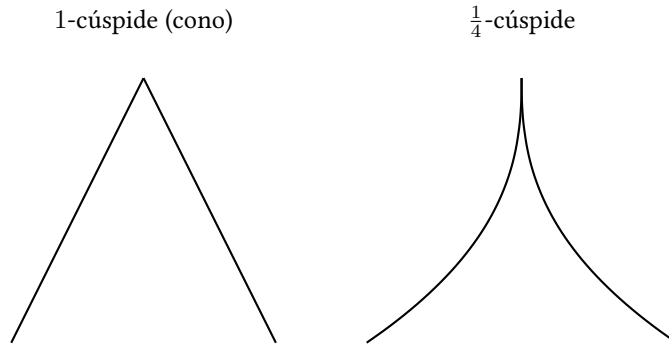


Figura 1: Dos posibles α -cúspides en el plano $\mathbb{R}^2$.

En la literatura es posible hallar ejemplos de dominios Hölder- α con $0 < \alpha < 1$ para los cuales no existen soluciones de (0.2) que cumplan la desigualdad en normas $\|\mathbf{u}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$ para ningún $1 < p < \infty$ (ver [Fri37; GG98; ADL13]). En estos ejemplos, la presencia de cúspides de tipo potencia fue precisamente la que imposibilitó el hallazgo de soluciones lo suficientemente regulares para ser incluidas en los espacios de Sobolev convencionales y con normas controladas por las normas p de la función f . Por esta razón, en [Lóp10], el problema de la divergencia fue considerado en el contexto de espacios de Sobolev modulados por pesos que permitiesen, de alguna forma, lidiar con las eventuales singularidades presentes en la frontera $\partial\Omega$.

En lo que sigue, designaremos como peso a toda función $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ localmente integrable. Fijo un peso w y un número $1 \leq p < \infty$, consideramos los espacios $L^p(\Omega, w)$ y $W^{1,p}(\Omega, w)$ formados por todas las funciones localmente integrables ϕ para las cuales

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega, w)} := \left(\int_{\Omega} |\phi(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

o

$$\|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega, w)} := \left(\|\phi\|_{L^p(\Omega, w)}^p + \sum_{i=1}^n \|\partial\phi/\partial x_i\|_{L^p(\Omega, w)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

según corresponda. Por otro lado, diremos que un campo vectorial $\mathbf{u}$ pertenece a $W^{1,p}(\Omega, w)^n$ si cada entrada del vector se halla en $W^{1,p}(\Omega, w)$, dotando al primer espacio con la norma vectorial heredada de este último.

Teniendo en cuenta los conceptos hasta ahora introducidos, pondremos nuestra atención a la búsqueda de soluciones del problema bidimensional $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$ en Ω tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega, w_1)^2} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega, w_2)},$$

asumiendo que Ω es un dominio abierto, acotado y Hölder- α ($0 < \alpha \leq 1$) contenido en el plano $\mathbb{R}^2$. Como se adelantó previamente, la existencia de soluciones estará condicionada en gran medida por la naturaleza regularizante de los pesos w_1 y w_2 . Debido a esto, resulta conveniente considerar pesos de la forma $w_i(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\theta_i}$, donde $\operatorname{dist}(x, E) := \inf_{y \in E} |x - y|$, esperando que valores adecuados para las potencias θ_i sean suficientes para contrarrestar el efecto indeseado de las cúspides sobre las soluciones. En el futuro, nos referiremos a estas funciones como *pesos distancia*.

Supongamos ahora que la función f pertenece a $L^p(\Omega, \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)^\theta)$ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$ a elegir con posterioridad y observemos que podemos extender f a todo $\mathbb{R}^2$ tomando $\tilde{f}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})$ si $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\tilde{f}(\mathbf{x}) := 0$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Sea

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

donde $\Gamma(\mathbf{z}) = -\log |\mathbf{z}|$, el potencial generado por $\tilde{f}$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, $\Delta\phi = \tilde{f}$ y, en consecuencia, $\mathbf{v} := \nabla\phi$ cumple $\operatorname{div} \mathbf{v} = f$ en Ω , por lo que básicamente hemos obtenido una solución al problema de la divergencia en Ω a partir de la solución fundamental del laplaciano en dos dimensiones. Ahora bien, para que se cumpla una desigualdad en normas como la requerida previamente, es necesario además que las derivadas primeras de $\mathbf{v}$ estén controladas por la norma de f . Pero es precisamente aquí donde ocurre lo interesante desde el punto de vista del análisis armónico, puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{=: K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \tilde{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

siendo que el integrando puede reescribirse de la forma $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2} \omega_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, donde las funciones ω_{ij} son suaves, homogéneas de grado 0 y con integral nula sobre la circunferencia unitaria. Esto es, K_{ij} son lo que se conoce como *núcleos de Calderón-Zygmund*. Más importante aún es el hecho que la acotación de operadores integrales singulares dados por este tipo de núcleos en espacios L^p pesados está completamente caracterizada por las clases de Muckenhoupt. En efecto, López García demostró que bajo ciertas hipótesis de *regularidad Ahlfors* para el borde de Ω y para valores apropiados de θ , los pesos $\operatorname{dist}(\cdot, E)^\theta$ son de Muckenhoupt y, consecuentemente, valen las cotas

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \phi(\mathbf{x}) \right|^p \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)^\theta d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)^\theta d\mathbf{x}$$

para $1 \leq p < \infty$. Así es como en este caso es posible determinar que $\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega, w)^2} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega, w)}$ con $w = \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)^\theta$ y, si bien en lo anterior no es realmente necesario asumir que el dominio Ω sea del tipo Hölder- α , el hallazgo de una función $\mathbf{v}$ como la anterior permite obtener soluciones más generales de (0.2) en este tipo de dominios y para funciones f con valor medio nulo, aunque para más detalles referimos al lector interesado al trabajo original de López García.

El problema de la divergencia en espacios modulados por pesos distancia es un claro ejemplo donde la condición Muckenhoupt juega un papel de suma importancia para la existencia de soluciones, aunque no es el único en el área de las EDP. Contextos similares fueron considerados por diversos autores para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no-lineales. Ver, por ejemplo, [DS04; DST08; DST10; Sou04].

Otro contexto donde la condición A_p de los pesos distancia juega un papel clave es el de las desigualdades de Hardy-Sobolev, que poseen aplicaciones en el estudio de dominios con bordes irregulares. Si $1 \leq p, q < \infty$ y Ω es un abierto propio en $\mathbb{R}^n$, se dice que Ω admite una (q, p) -desigualdad de Hardy-Sobolev con constante $C > 0$ si

$$\left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^q \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{\frac{q}{p}(n-p)-n} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0.3)$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ o, equivalentemente por argumentos de densidad, para toda $u \in \text{Lip}_c(\Omega)$. Aquí, $\text{Lip}_c(\Omega)$ denota al espacio de funciones Lipschitz de soporte compacto en Ω .

Empleando argumentos basados en técnicas de dominación *sparse* y acotación de operadores maximales fraccionarios, los autores de la monografía [KLV21] obtienen la siguiente estimación para pesos de la clase A_{∞} : si $1 < p \leq q < \infty$ y w, v son pesos tales que $w \in A_{\infty}$ y $\sigma := v^{\frac{1}{1-p}} \in A_{\infty}$ y además cumplen

$$\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{n}}} \right)^p \left(\int_Q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_Q \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{p-1} \lesssim 1 \quad (0.4)$$

para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})|^q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^p v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (0.5)$$

para toda $u \in \text{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$.

Notemos que (0.5) guarda cierta similitud con la (q, p) -desigualdad de Hardy-Sobolev (0.3) si los pesos w, v se reemplazan por pesos distancia adecuados. En efecto, en la monografía mencionada se demuestra también que si la denominada dimensión de Assouad² $\dim_A E$ de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ cumple $\dim_A E < n - \alpha$, entonces $w := \text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$\int_{Q(\mathbf{x}, r)} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \lesssim r^{-\alpha}, \quad (0.6)$$

donde $Q(\mathbf{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ es el cubo centrado en $\mathbf{x}$, de lado $2r$ y paralelo a los ejes. Luego, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto propio con $\dim_A(\partial\Omega) < n$, podemos elegir $1 < p < n$ y $p \leq q < \frac{np}{n-p}$ tales que $\dim_A(\partial\Omega) < \frac{q}{p}(n-p)$, en particular si $\alpha := n - \frac{q}{p}(n-p)$, entonces $w = \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)^{-\alpha}$ es un peso en A_1 y, tomando $v = 1$, es posible deducir (0.4).

A continuación y, a modo ilustrativo, verificamos que para nuestra elección de w y de v se cumple (0.4). Si $Q(\mathbf{x}, 2r) \cap \partial\Omega = \emptyset$, es sencillo ver que en el conjunto $Q := Q(\mathbf{x}, r)$ se cumple $\text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \simeq \text{dist}(Q, \partial\Omega)$, por lo tanto usando que $\sigma = 1$ podemos estimar

²La dimensión de Assouad es una herramienta usual en la teoría geométrica a la medida y su definición exacta se dará a conocer en el Capítulo 2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{n}}}\right)^p \left(\int_Q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_Q \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{p-1} &= |Q|^{-p+\frac{p}{n}+p-1} \left(\int_Q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\lesssim |Q|^{-p+\frac{p}{n}+p-1+\frac{p}{q}} \text{dist}(Q, \partial\Omega)^{n-p-\frac{np}{q}} \\
&\simeq |Q|^{-p+\frac{p}{n}+p-1+\frac{p}{q}+1-\frac{p}{n}-\frac{p}{q}} \quad n-p-\frac{np}{q} \leq 0 \\
&\simeq 1.
\end{aligned}$$

En el caso que $Q(\mathbf{x}, 2r) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, recurrimos a (0.6) para deducir que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{n}}}\right)^p \left(\int_Q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_Q \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{p-1} &= |Q|^{-p+\frac{p}{n}+p-1} \left(\int_Q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\lesssim |Q|^{\frac{p}{n}-1} \left(r^{\frac{q}{p}(n-p)}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\simeq |Q|^{\frac{p}{n}-1+1-\frac{p}{n}} \\
&\simeq 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia, (0.5) es válido para toda función $u \in \text{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$. Pero entonces, dado que $\text{Lip}_c(\Omega) \subseteq \text{Lip}_c(\mathbb{R}^n)$, se sigue finalmente

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^q \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)^{\frac{q}{p}(n-p)-n} d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})|^q w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\mathbf{x})|^p v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

para toda $u \in \text{Lip}_c(\Omega)$, por lo que la (q, p) -desigualdad de Hardy-Sobolev es válida en Ω para el rango de parámetros considerado. Cabe mencionar que obtener acotaciones como (0.3) es a su vez de sumo interés debido a aplicaciones que van desde el estudio de la regularidad y la compacidad en espacios de Sobolev ponderados hasta problemas de existencia y estimaciones *a priori* para ecuaciones en derivadas parciales [DiB93; Maz11; KLV21].

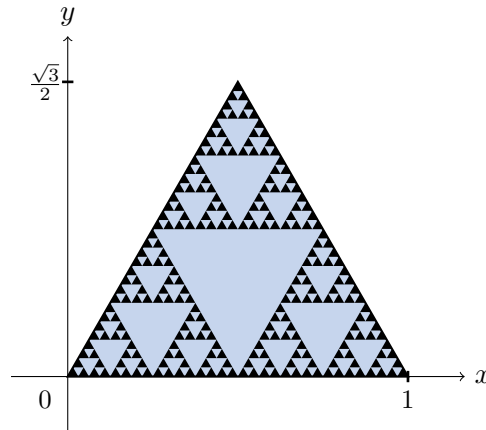


Figura 2: El dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que consta de los puntos interiores de un triángulo equilátero menos el triángulo de Sierpinski (área coloreada en azul claro) cumple con la hipótesis $\dim_A \partial\Omega < 2$ y es posible por lo tanto obtener desigualdades de Hardy-Sobolev en Ω utilizando los exponentes adecuados.

Los procedimientos que condujeron a la obtención de las aplicaciones analizadas en los párrafos anteriores comparten un rasgo fundamental: la imposición de una condición geométrica sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ llevó a obtener una condición de Muckenhoupt sobre sus pesos asociados. No resulta por tanto sorprendente que ya hayan sido estudiadas condiciones suficientes para obtener pesos distancia en numerosos trabajos a través de las últimas décadas. En este sentido, podemos nombrar, por ejemplo, los trabajos: [Hor91], en donde la condición geométrica considerada está relacionada con una propiedad de densidad de medida; [Sem96], donde la geometría de los conjuntos considerados cumple con cierta propiedad de dispersión; [DL10; Lóp10; Aim+14], que se basan en hipótesis de Ahlfors regularidad; [Dyd+19], donde se estudian nociones de porosidad de conjuntos. En el año 2003, A. V. Vasin [Vas03] obtuvo una caracterización completa de los subconjuntos del círculo unidad cuyos pesos distancia satisfacen la propiedad A_1 en dicho espacio. Este resultado dio origen al concepto de conjuntos *débilmente porosos*, el cual no fue extendido a espacios euclídeos sino hasta el más reciente trabajo [And+24]. Posteriormente, surgió un gran número de contribuciones orientadas al estudio de estos conjuntos tanto en espacios euclídeos como en contextos más generales, a saber, [Mud25; AGG24; Aim+25; Góm26; PU25; Vas25].

El concepto de porosidad débil juega un papel central en esta tesis, hasta el punto que los resultados principales aquí descritos se basan en generalizaciones de este concepto a espacios más generales o clases de pesos diferentes. Una introducción al trabajo [And+24] será presentada en el Capítulo 1, donde además se dará a conocer una prueba alternativa a la equivalencia

$$E \subseteq \mathbb{R} \text{ es débilmente poroso} \iff \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R}),$$

que corresponde al resultado principal de [And+24] en el caso unidimensional. Por otro lado, se analizará cómo esta nueva demostración puede extenderse al contexto de los espacios de tipo homogéneo, asimismo se presentará una breve discusión sobre los aspectos que deben considerarse para obtener una caracterización análoga en el caso $p > 1$. Estas primeras exploraciones tienen por objetivo sentar las bases para el estudio sistemático de este y otros problemas en los capítulos posteriores. La organización del resto de la tesis es la siguiente.

El Capítulo 2 introduce las definiciones y resultados elementales del análisis armónico en espacios de tipo homogéneo. Aquí, se describe la teoría de los espacios uniformes y su metrización; los espacios cuasi-métricos y su topología uniforme; se dan a conocer lemas de cubrimiento como el lema de cubrimiento tipo Whitney; se presentan propiedades básicas de los espacios de tipo homogéneo, incluyendo dimensiones de Assouad, Hausdorff y Minkowski; y, finalmente, se introduce una construcción, quizás no tan conocida, a la que nos referiremos como la *cuasi-métrica de Macías y Segovia*, la cual resultará imprescindible en la extensión de los resultados obtenidos en el Capítulo 1.

En el Capítulo 3 se continúa con un repaso de resultados elementales como los propios de la teoría de pesos de Muckenhoupt en espacios de tipo homogéneo. Si bien estos resultados son más bien conocidos, en la bibliografía suelen discutirse únicamente en el contexto de los espacios euclídeos, por lo que el objetivo principal de este capítulo es meramente demostrar su validez en el contexto de nuestro interés. Aquí se presentarán las clases A_1 y A_p de Muckenhoupt y se verificará que éstos resultan ser los pesos que definen las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood. Se demostrarán también propiedades básicas de estos pesos como las de dualidad y automejora. Por último, se discutirá sobre el caso particular de los pesos distancia, se elaborará sobre el ejemplo clásico de pesos de la forma $d(x, x_0)^{-\alpha}$ para un punto fijo x_0 y su pertenencia a las clases A_p y se dará a conocer una cronología detallada en relación a los trabajos en donde se hayan considerado este tipo de pesos, condiciones geométricas necesarias sobre el conjunto asociado y aplicaciones.

Los resultados de [And+24] serán finalmente extendidos al contexto de los espacios de tipo homogéneo en el Capítulo 4, donde no solo se presentará la definición de conjuntos débilmente porosos en estos espacios, sino que además se darán a conocer ejemplos concretos que cumplan con esta condición y se discutirán propiedades básicas de tales conjuntos. Los resultados principales de este capítulo se hallan en [AGG24].

En el Capítulo 5 se considerará el problema de caracterizar los subconjuntos de un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) que admitan pesos distancia en la clase A_p con $p > 1$. Los resultados presentados están basados en la publicación [Góm26], que fue la primera en establecer condiciones necesarias y suficientes en el caso $X = \mathbb{R}^n$. Si bien no todos los resultados son extendidos al caso general de un espacio (X, d, μ) , sí veremos que en el caso euclídeo existe una noción geométrica que generaliza adecuadamente al concepto de porosidad débil usual y que caracteriza a los conjuntos con pesos A_p asociados.

Finalmente, en el Capítulo 6, nos ocuparemos de caracterizar los subconjuntos de la recta real con pesos distancia en las clases $A_1^-(\mathbb{R})$ o $A_1^+(\mathbb{R})$, que denotan a las versiones laterales de las clases $A_1(\mathbb{R})$ usuales. A este fin, se introducirán los conjuntos *débilmente porosos por izquierda* y *débilmente porosos por derecha* y se verificará que éstos caracterizan a los conjuntos con pesos distancia asociados en las respectivas clases laterales. Además, veremos que estas nuevas condiciones son más generales que la de porosidad débil a través de ejemplos sencillos y veremos que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es débilmente poroso en el sentido usual si y solo si es simultáneamente débilmente poroso por izquierda y débilmente poroso por derecha, en completa analogía con el hecho que $w \in A_1(\mathbb{R})$ si y solo si $w \in A_1^-(\mathbb{R}) \cap A_1^+(\mathbb{R})$. Este último capítulo está basado en el trabajo [Aim+25].

Notación

Estas páginas están dedicadas a introducir notación básica que se utilizará de manera sistemática a lo largo de la tesis. Como primer comentario, vale aclarar que si bien en la introducción se emplearon caracteres en negrita para denotar cantidades vectoriales con el fin de respetar la notación habitual en el área de ecuaciones en derivadas parciales, dicha convención no se mantendrá en el resto de los capítulos, donde el contexto permitirá distinguir sin ambigüedad entre objetos escalares y vectoriales. Algunos de los símbolos y notaciones frecuentes a utilizar de aquí en más son los siguientes.

- ♦ Para un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y un punto $x \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia euclídea de x a E mediante

$$\text{dist}(x, E) := \inf_{y \in E} |y - x|.$$

Si $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ es una cuasi-métrica sobre un conjunto X , optamos en vez por utilizar la notación

$$d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y).$$

para $x \in X$, $E \subseteq X$. Análogamente, la distancia entre dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ se define como

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

- ♦ El conjunto de partes de un conjunto X se denota por $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$.
- ♦ En un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, dados una función medible $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) > 0$, se utiliza la notación

$$\int_A f d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu$$

para representar el valor medio de f sobre A .

- ♦ Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es Lebesgue medible, escribimos $|A|$ para denotar la medida de Lebesgue de este conjunto.
- ♦ Los puntos de $\mathbb{R}^n$ a menudo se escriben como $x = (x_1, \dots, x_n)$. Esto es, x_i denota la i -ésima entrada del vector x .
- ♦ En un espacio topológico (X, τ) , el interior y la clausura de un conjunto $A \subseteq X$ se denotarán respectivamente por A° y $\bar{A}$.
- ♦ El símbolo $\wedge$ se empleará a menudo para representar la conjunción lógica “y”.
- ♦ Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión no decreciente (respectivamente, no creciente) que converge a un límite x^* , se escribirá $x_n \nearrow x^*$ (respectivamente, $x_n \searrow x^*$).
- ♦ Dado un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ y un escalar $a > 0$, se define $aU = \{au : u \in U\}$, la dilatación de U por a .

- ♦ Para un conjunto $E \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$, se define el ε -entorno de E respecto de la cuasi-métrica d como

$$E_d(\varepsilon) := \{x \in X : d(x, E) < \varepsilon\}.$$

En el caso particular en que d sea la distancia euclídea y $E \subseteq \mathbb{R}^n$, se escribirá simplemente $E(\varepsilon)$.

- ♦ La función característica de un conjunto medible $A \subseteq X$ se denotará por $\mathbb{1}_A(\cdot)$
- ♦ El símbolo $\#$ se reservará para la medida de contar.
- ♦ Las funciones suelo y techo se representarán, respectivamente, mediante $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$, mientras que $[x]$ será utilizado para hacer referencia a la parte entera de x .
- ♦ La dependencia de una constante C en función de variables $x, y, z, \dots$ es representada mediante la notación $C(x, y, z, \dots)$. Más aún, el valor de $C(x, y, z, \dots)$ puede variar en desigualdades sucesivas. Los símbolos $\lesssim$ y $\gtrsim$ se utilizarán para indicar desigualdades que valen salvo multiplicación por una constante.

Esta es la notación elemental que conviene tener en cuenta en el desarrollo de esta tesis. El resto de la notación utilizada se introducirá gradualmente en el propio desarrollo del texto.

Pesos distancia en la recta

En este capítulo consideraremos el problema de caracterizar los subconjuntos E de la recta real para los cuales existe un número $\alpha > 0$ tal que la función $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$ es un peso de la clase A_1 . Si bien este problema fue resuelto con anterioridad por otros autores, comprobaremos por un método alternativo que la colección de subconjuntos que cumplen con la premisa anterior coincide con la familia de los conjuntos débilmente porosos propuestos, en el caso de $\mathbb{R}^n$, por T. C. Anderson, J. L  rhback, C. Mudarra & A. V. V  h  kangas e inspirados en el trabajo de A. V. Vasin para subconjuntos del   rculo unidad. Aunque los resultados contenidos en las siguientes páginas no son más que casos especiales de la teoría general a desarrollar en el [Capítulo 4](#), esperamos que sirvan al lector como una introducción amena a los métodos de prueba que más adelante serán refinados para adaptarlos a espacios con geometrías más complejas. Asimismo, discutiremos brevemente sobre qué aspectos geométricos de los conjuntos E se verán modificados al considerar pesos distancia en la clase A_p para valores $p > 1$.

Contenidos

1.1	Sobre los pesos distancia en $\mathbb{R}^n$	21
1.2	Una primera mirada a la porosidad débil	23
1.3	Resolución del Problema 1.1 en la recta	26
1.4	Pesos distancia A_p en la recta: el caso $p > 1$	33

1.1 Sobre los pesos distancia en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que un peso en $\mathbb{R}^n$ es una función localmente integrable $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, aunque nuestra atención residirá siempre en los pesos distancia, esto es, en aquellos w que puedan escribirse de la forma $w(x) = \text{dist}(x, E)^\theta$, donde θ es un número real, E es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\text{dist}(x, F) := \inf_{y \in F} |x - y|$, para cualquier $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$. Como se dejó entrever en la introducción, nuestro principal interés reside en determinar cuándo un peso distancia cumple con las condiciones de Muckenhoupt para algún valor de $p \geq 1$. Si denotamos por $B(x, r)$ a la bola (abierta) en $\mathbb{R}^n$ centrada en x y con radio r , la clase de Muckenhoupt en $\mathbb{R}^n$ con $1 < p < \infty$ se denota como $A_p(\mathbb{R}^n)$ (o simplemente A_p) y está conformada por todos los pesos w para los cuales existe una constante $C = C(w)$ tal que

$$\left(\int_{B(x,r)} w(y) dy \right) \left(\int_{B(x,r)} w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq C \quad (1.1)$$

para todo $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}$ y donde $C > 0$ es una constante fija. Por otro lado, la clase $A_1(\mathbb{R}^n)$ (también denotada A_1) consta de los pesos w para los cuales existe $C = C(w)$ tal que

$$\int_{B(x,r)} w(y) dy \leq C \operatorname{ess\,inf}_{y \in B(x,r)} w(y), \quad (1.2)$$

para toda bola $B(x, r)$. Si $w \in A_p$ denotamos por $[w]_{A_p}$ al ínfimo de todas las constantes C para las cuales (1.1) vale para toda bola, mientras que $[w]_{A_1}$ se define de forma análoga en el caso que $w \in A_1$. Con esto, y para todo $1 \leq p < \infty$, podemos escribir

$$A_p = \{w : w \text{ es un peso en } \mathbb{R}^n \wedge [w]_{A_p} < \infty\}.$$

Si bien las condiciones A_p fueron enunciadas en términos de desigualdades sobre bolas, lo cierto es que gozan de cierta versatilidad en cuanto a la familia de subconjuntos donde se efectúe la integración. En particular, si denotamos por

$$Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : -r \leq y_i - x_i < r, \forall i = 1, \dots, n\}$$

al cubo centrado en x con lado $2r$, entonces las cantidades

$$[w]_{A_p}^Q := \inf_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}} \left(\int_{Q(x,r)} w(y) dy \right) \left(\int_{Q(x,r)} w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1}$$

y

$$[w]_{A_1}^Q := \inf_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}} \left(\int_{Q(x,r)} w(y) dy \right) \left(\operatorname{ess\,sup}_{y \in Q(x,r)} w(y)^{-1} \right)$$

son comparables con $[w]_{A_p}$ y $[w]_{A_1}$, respectivamente³. Además, para todo $1 \leq p < \infty$,

$$A_p = \{w : w \text{ es un peso en } \mathbb{R}^n \wedge [w]_{A_p}^Q < \infty\}.$$

Cabe destacar que existen varias descripciones alternativas de las clases A_p , algunas de las cuales involucran al operador maximal de Hardy-Littlewood. Esto no es casual, sino que los pesos de A_p son precisamente aquellos para los cuales dicho operador es acotado en los respectivos espacios de Lebesgue pesados. Debido al carácter introductorio de este capítulo, no entraremos en mayores detalles en cuanto a esto, en vez reservaremos esta discusión para el [Capítulo 4](#).

Preguntarse cuándo un peso distancia está en A_p para algún $1 \leq p < \infty$ tiene sentido, después de todo se sabe⁴ que $x \mapsto |x|^\theta$ pertenece a A_p siempre que $-n < \theta < n(p-1)$, siendo que esta función no es otra que el peso distancia asociado al conjunto $E = \{0\}$. Con el fin de mantener relativamente simple el desarrollo de las próximas secciones, comenzaremos por tratar únicamente el caso A_1 (de hecho, la resolución de este caso será de por sí considerablemente compleja cuando sea considerado en el contexto de espacios más generales), con lo que el problema a considerar queda enunciado de la siguiente forma.

Problema 1.1. Caracterizar la familia de conjuntos no vacíos $E \subseteq \mathbb{R}^n$ para los cuales existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{dist}(\cdot, E)^\theta$ es un peso no constante en $A_1(\mathbb{R}^n)$.

No es difícil verificar que una condición necesaria para que $w = \operatorname{dist}(\cdot, E)^\theta$ cumpla (1.2) para toda bola $B(x, r)$ es que $\theta < 0$. De no ser así, tendríamos que $w \equiv 0$ o $w \equiv 1$: casos

³Esta proporcionalidad entre las constantes $[w]_{A_p}$ y $[w]_{A_p}^Q$ es un caso especial de la relación que existe entre constantes A_p al considerar dos cuasi-métricas equivalentes definidas en un mismo conjunto X . Para más detalles nos referimos a la Sección 3.2

⁴Ver Sección 3.3 para una demostración de esta afirmación.

donde la geometría del conjunto E resulta trivial. Por este motivo, basta con caracterizar los conjuntos E tales que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R}^n)$ para cierto $\alpha > 0$. Denotando por $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$ a la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que resultan ser solución al [Problema 1.1](#), que sabemos es no vacía gracias al ejemplo $x \mapsto |x|^\theta$, podemos deducir rápidamente algunas de las propiedades necesarias que debe poseer cierto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ para pertenecer a $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$. Por poner un ejemplo, dado que $\text{dist}(x, E) = \text{dist}(x, \bar{E})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (donde $\bar{E}$ y E° denotan la clausura y el interior de E , respectivamente) y que todo peso es localmente integrable por definición, se puede inferir que $|\bar{E}| = 0$, donde $|\cdot|$ denota a la medida de Lebesgue. En particular, $(\bar{E})^\circ = \emptyset$, por lo que $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$ está contenido en la familia de los subconjuntos nunca densos de $\mathbb{R}^n$. Es esta observación la que debería atenuar la sorpresa del lector al descubrir, en las próximas páginas, que la colección de soluciones $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$ está conformada por conjuntos caracterizados por una cierta noción de *porosidad*.

1.2 Una primera mirada a la porosidad débil

El [Problema 1.1](#) ha sido considerado directa o indirectamente por diversos autores a lo largo de los años, habiéndose encontrado múltiples condiciones suficientes para que se cumpla $E \in \Sigma_1(\mathbb{R}^n)$. No obstante, una cronología detallada y un resumen de dichos resultados serán dados a conocer en la [Sección 3.3](#). El objetivo de esta sección reside en presentar conceptos y resultados recientes al problema en consideración. A saber, presentaremos el concepto de *porosidad débil*.

La porosidad débil fue introducida por A. V. Vasin en [\[Vas03\]](#) con la finalidad de caracterizar los subconjuntos del círculo unidad $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^2$ que son soluciones a un problema análogo al [Problema 1.1](#), reemplazando $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{T}$ en el enunciado de este último⁵. En aquel trabajo, se considera como débilmente poroso a todo subconjunto $E \subseteq \mathbb{T}$ para el cual es posible hallar constantes $0 < \sigma, \gamma < 1$ tales que para todo arco $I \subseteq \mathbb{T}$ se tiene

$$\sum |J_k| > \sigma |I|,$$

donde la sumatoria recorre todos los arcos $J_k \subseteq I \setminus E$ con longitud $|J_k| > \gamma |I|$, siendo J uno de los arcos contenidos en $I \setminus E$ con mayor longitud.

En el más reciente artículo [\[And+24\]](#), T. C. Anderson, J. L  hrback, C. Mudarra & A. V. V  h  kangas extendieron la definición de A. V. Vasin a conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Debido al enfoque diádico que utilizaron para enunciar esta nueva definición, resulta conveniente introducir algo más de notación antes de darla a conocer. Diremos que $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cubo si $Q = Q(x, r)$ para ciertos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ (en particular, cada cubo posee bordes inferiores cerrados y superiores abiertos). Además, denotamos por $l(Q)$ a la longitud de sus lados. De esta forma, cada cubo Q_0 admite una descomposición diádica

$$\mathcal{D}(Q_0) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}^j(Q_0),$$

donde $\mathcal{D}^j(Q_0)$ es la colección de los 2^{jn} cubos disjuntos Q con lados $l(Q) = 2^{-j}l(Q_0)$ y tales que $\bigcup_{Q \in \mathcal{D}^j(Q_0)} Q = Q_0$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Llamaremos (*sub*)*cubos diádicos* de Q_0 a los elementos de la familia $\mathcal{D}(Q_0)$ y (*sub*)*cubos diádicos de j -ésima generación* a los elementos de $\mathcal{D}^j(Q_0)$. Las siguientes propiedades se siguen automáticamente de la definición de cubos diádicos de Q_0 :

-    si $Q \in \mathcal{D}^j(Q_0)$ con $j \geq 1$, entonces existe un único cubo $\pi Q \in \mathcal{D}^{j-1}(Q_0)$ tal que $Q \subset \pi Q$. En palabras, πQ es el *padre diádico* de Q , mientras que Q es un *hijo diádico* de πQ ;

⁵En realidad, A. V. Vasin plantea un problema equivalente al mencionado al requerir que $\log \text{dist}(\cdot, E)^{-1} \in \text{BLO}(\mathbb{T})$.

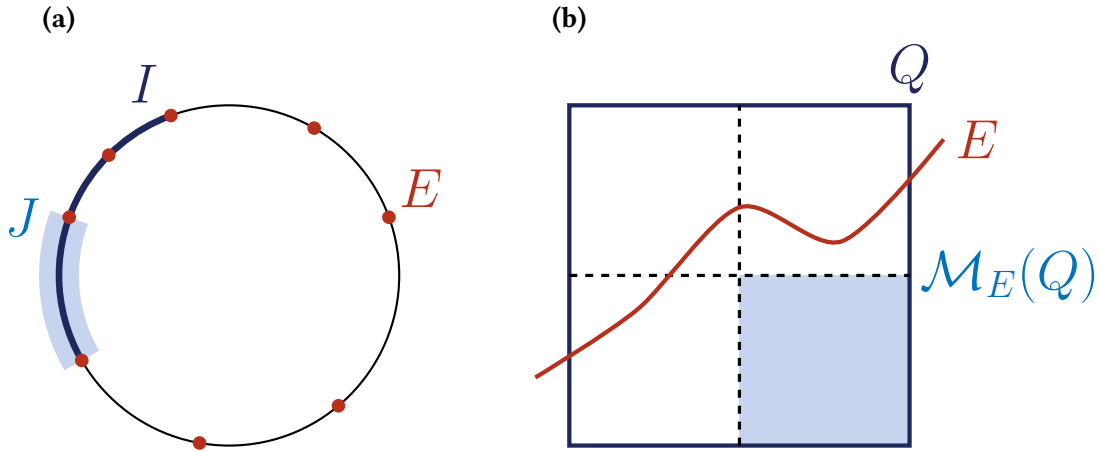


Figura 1.1: Porosidad débil en la circunferencia y en $\mathbb{R}^n$: se esquematizan los poros maximales con respecto a un conjunto E contenido en un arco I de la circunferencia (a) y en un cubo Q del plano (b).

- ◇ todo $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ tiene exactamente 2^n hijos diádicos;
- ◇ dados $Q, P \in \mathcal{D}(Q_0)$ tales que $Q \cap P \neq \emptyset$, entonces o bien $Q \subseteq P$ o $P \subseteq Q$.

Ahora bien, dado un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y un cubo cualquiera Q_0 , denotamos mediante $\mathcal{M}_E(Q_0)$ a alguno de los subcubos diádicos de Q_0 que satisfacen $Q \subseteq Q_0 \setminus E$ y que poseen mayor medida de Lebesgue, es decir,

$$|\mathcal{M}_E(Q_0)| = \sup\{|Q| : Q \in \mathcal{D}(Q_0) \wedge Q \cap E = \emptyset\}.$$

Esta ambigüedad en la definición de $\mathcal{M}_E(Q_0)$, que a partir de ahora llamaremos *poro maximal diádico* con respecto a E en Q_0 , no representará mayor problema puesto que en general se hará referencia a las cantidades $l(\mathcal{M}_E(Q_0))$ o $|\mathcal{M}_E(Q_0)|$, ambas unívocamente definidas. Usualmente, y cuando el contexto sea claro, omitiremos referencia al conjunto E y escribiremos simplemente $\mathcal{M}(Q_0) = \mathcal{M}_E(Q_0)$. Naturalmente, el poro maximal diádico $\mathcal{M}(P)$ asociado a un cubo P juega el papel que interpretaba el arco maximal J asociado a I en la definición previa de A. V. Vasin.

En base a todo lo anterior, diremos que el conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es débilmente poroso si existen constantes $0 < \sigma, \gamma < 1$ tales que para todo cubo $P \subseteq \mathbb{R}^n$, existen $N \in \mathbb{N}$ (dependiente de P) y cubos diádicos disjuntos $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{D}(P)$ que satisfacen

- i. $Q_i \subseteq P \setminus E$, para todo $i = 1, \dots, N$;
- ii. $|Q_i| \geq \gamma |\mathcal{M}(P)|$ para todo $i = 1, \dots, N$;
- iii. $\sum_{i=1}^N |Q_i| \geq \sigma |P|$.

En otras palabras, un conjunto E es débilmente poroso si para cada cubo P es posible cubrir un volumen proporcional a $|P|$ (con constante de proporcionalidad σ) a partir de subcubos diádicos disjuntos de lado proporcional a $\mathcal{M}(P)$ (con constante de proporcionalidad γ) y de forma que ninguno de estos subcubos interseque con E .

Algunos ejemplos de conjuntos débilmente porosos son aquellos formados por una cantidad finita de puntos o conjuntos dispersos maximales, tales como $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$. En todo caso, reservamos para más adelante la verificación de la condición de porosidad débil para ejemplos concretos. Lo

interesante de la clase de conjuntos débilmente porosos en $\mathbb{R}^n$ es que coincide con la colección $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$, cuya caracterización era nuestro principal objetivo. Efectivamente, el siguiente es uno de los resultados principales obtenidos por Anderson *et al.*

Teorema 1.2 ([And+24]). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces, equivalen*

1.2.1. *existe $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R}^n)$;*

1.2.2. *E es débilmente poroso.*

La equivalencia presentada en el Teorema 1.2 puede parecer sorprendente debido a la relativa simpleza de la definición de porosidad débil. No obstante, lo cierto es que esta definición tiene fuertes implicancias sobre la forma en que se distribuyen globalmente los poros del conjunto E , entendiendo como poros a los cubos $Q \in \mathcal{D}(P)$ que cumplan $Q \subseteq P \setminus E$ y $\pi Q \cap E \neq \emptyset$ para un cubo fijo P . El primer paso para comprender cómo la condición de porosidad débil influye en la distribución de los poros es la deducción de la propiedad de duplicación de $\mathcal{M}$ ([And+24]):

$$|\mathcal{M}(\pi Q)| \leq C(\sigma, \gamma) |\mathcal{M}(Q)| \quad (1.3)$$

para todo $Q \in \mathcal{D}(P)$ y para todo P cubo en $\mathbb{R}^n$. Esto significa que el tamaño del poro maximal diádico en Q no puede ser mucho más pequeño que el propio de su padre diádico πQ . Esta propiedad, combinada con la monotonicidad creciente de la aplicación $Q \mapsto |\mathcal{M}(Q)|$, puede utilizarse en un argumento inductivo como el ilustrado en la Figura 1.2. Aquí, la definición de porosidad débil de un conjunto E es empleada sobre un cubo P para obtener una secuencia finita de subcubos disjuntos $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{D}(P)$ que cumplen las propiedades i-iii, en particular cubren una fracción mayor o igual que σ del volumen de P . Si ahora R es un cubo diádico maximal contenido en $P \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i$, entonces (1.3) y la monotonicidad de $\mathcal{M}$ pueden emplearse para comprobar que $|\mathcal{M}(R)| \geq C(\sigma, \gamma) |\mathcal{M}(P)|$. Luego, la condición de porosidad débil de E puede aplicarse a cada uno de los cubos diádicos maximales R que forman el complemento de $\bigcup_{i=1}^N Q_i$ en P para cubrir una fracción aún mayor de este último. El resultado de iterar este procedimiento de forma inductiva lleva a inferir que $P \setminus E$ puede cubrirse en su totalidad con una cantidad numerable de poros diádicos Q que cubren fracciones de volumen cada vez más pequeñas conforme su volumen decrece con respecto a la cantidad $|\mathcal{M}(P)|$.

El método ilustrado en la Figura 1.2 fue utilizado en [And+24] para deducir la desigualdad

$$\int_P \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq C(\sigma, \gamma, \alpha) |\mathcal{M}(P)|^{-\alpha}$$

para todo cubo P y para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, siendo que la cantidad $|\mathcal{M}(P)|^{-\alpha}$ es intuitivamente comparable con el ínfimo que la función $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$ toma en P (al menos en el caso en que $P \cap E \neq \emptyset$, el procedimiento difiere en el caso restante), permitiendo así deducir la condición A_1 .

En resumen, la prueba del Teorema 1.2 reside fuertemente en el carácter diádico tanto de las definiciones como de los métodos de demostración en sí, lo cual resulta conveniente en contextos euclídeos pero puede presentar dificultades técnicas al tratar de implementarse en espacios más generales. Por este motivo, presentaremos en la próxima sección una demostración alternativa de este teorema basándonos en un procedimiento que, con las herramientas adecuadas, puede generalizarse a conjuntos más abstractos munidos con métricas o cuasi-métricas y con medidas duplicantes fuera de la usuales en $\mathbb{R}^n$. Con la finalidad de simplificar la exposición, nos limitaremos en este capítulo a introducir el método alternativo en el caso unidimensional.

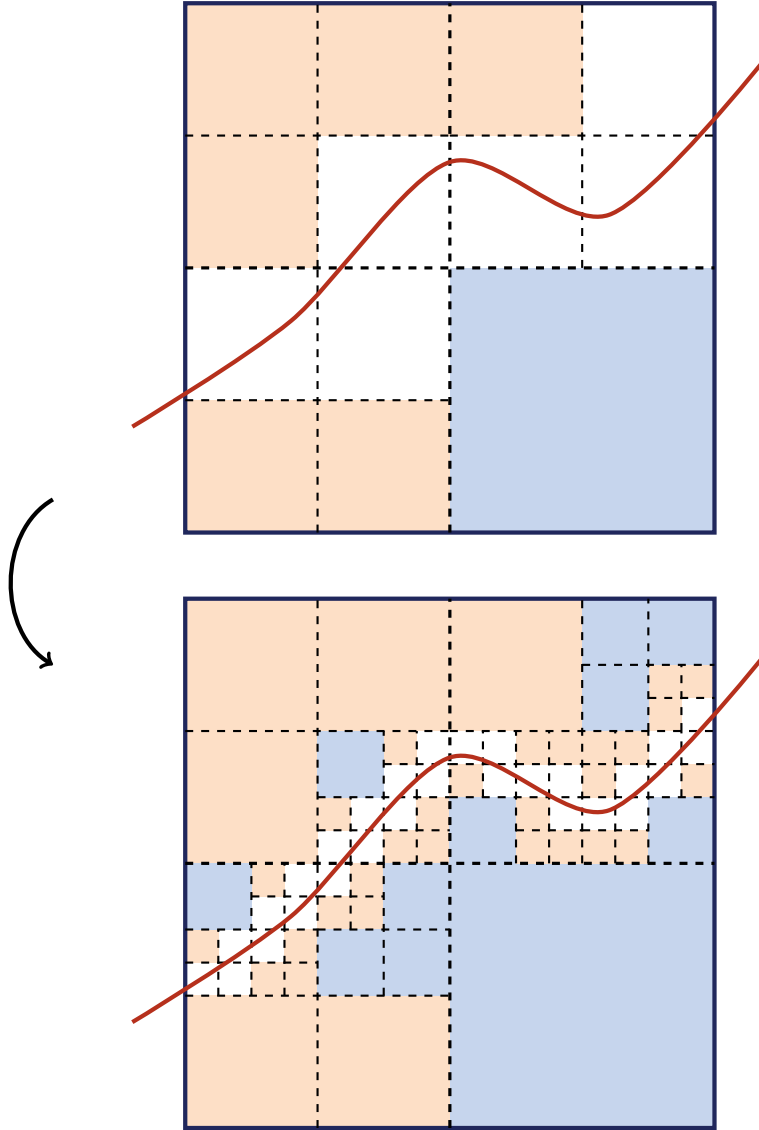


Figura 1.2: Tomando E y Q como en la Figura 1.1b, se esquematiza el proceso de aplicación sucesiva de la definición de porosidad débil. Como resultado, se obtiene una sucesión de poros diádicos que cubre una fracción cada vez mayor del conjunto $Q \setminus \bar{E}$. Este proceso es empleado en [And+24] para deducir una relación profunda entre la totalidad de la distribución de los poros diádicos en Q y la longitud de lado del cubo $l(\mathcal{M}(Q))$.

1.3 Resolución del Problema 1.1 en la recta

El punto de partida en la búsqueda de una demostración alternativa a la de [And+24] del Teorema 1.2 es la elección de una nueva definición de porosidad débil que no dependa de ningún sistema diádico, pero que resulte equivalente a la original. En particular, el rol del poro maximal diádico introducido anteriormente será interpretado por la siguiente función.

Definición 1.3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y I un intervalo arbitrario⁶ con extremos $a < b$.

⁶Con arbitrario nos referimos a que I puede o no contener a sus extremos.

Denotamos

$$\Lambda_E(I) = \{s > 0 : \exists y \in I \text{ tal que } (y - s, y + s) \subseteq I \setminus E\}.$$

En palabras, $\Lambda_E(I)$ colecciona los “radios” de todos los poros contenidos en I con respecto a E . Introducimos la **función de poro maximal** como $\rho_E(I) := \sup \Lambda_E(I)$. En el caso en que $\Lambda_E(I) = \emptyset$, simplemente tomamos $\rho_E(I) = 0$.

Al igual que con el poro maximal diádico, usualmente omitiremos la mención al conjunto E y escribiremos $\rho = \rho_E$ siempre que no dé lugar a confusiones. Por otro lado, es posible comprobar que el supremo que figura en la [Definición 1.3](#) puede intercambiarse por un máximo. Esto es, siempre es posible hallar un poro en I cuya longitud sea máxima en comparación con el resto de los poros.

Proposición 1.4. Sean E y I como arriba y supongamos que $\rho(I) > 0$, entonces

$$\rho(I) = \max \Lambda_E(I).$$

Demostración. Sean $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ y $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ dos sucesiones tales que

$$(y_n - s_n, y_n + s_n) \subseteq I \setminus E$$

y $s_n \nearrow \rho(I)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como I es un intervalo acotado, podemos encontrar una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y denotar $y^* := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. Ahora bien, si $z \in (\mathbb{R} \setminus I) \cup E$, entonces dado que $(y_{n_k} - s_{n_k}, y_{n_k} + s_{n_k}) \subseteq I \setminus E$, se sigue que $|y_{n_k} - z| \geq s_{n_k}$. Teniendo esto en cuenta y para $\varepsilon > 0$ fijo, podemos elegir k suficientemente grande tal que $s_{n_k} \geq \rho(I) - \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y^* - y_{n_k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para este valor de k se cumple

$$|y^* - z| \geq |y_{n_k} - z| - |y^* - y_{n_k}| \geq s_{n_k} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \rho(I) - \varepsilon.$$

Tomando el límite cuando ε tiende a cero, concluimos $(y^* - \rho(I), y^* + \rho(I)) \subseteq I \setminus E$. ■

Definición 1.5. Dados $\sigma, \gamma \in (0, 1)$, diremos que un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}$ es (σ, γ) -**débilmente poroso** (o (σ, γ) -d.p. para abreviar) si para cada intervalo abierto I podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ (que depende de I) y una colección de intervalos abiertos y disjuntos de a pares $I_1, \dots, I_N$ que satisfacen

$$1.5.1. \quad I_i \subseteq I \setminus E \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$1.5.2. \quad |I_i| \geq 2\gamma\rho(I) \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$1.5.3. \quad \sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I|.$$

Observaciones. (1) La presencia del número 2 en 1.5.2 se debe al hecho que se está comparando la longitud de cada intervalo I_i con el “radio” del poro maximal $\rho(I)$. Alternativamente podríamos optar por requerir $\gamma < \frac{1}{2}$ y eliminar dicha constante, pero la restricción $0 < \gamma < 1$ aparecerá más adelante en versiones más generales de esta definición, por lo que resulta conveniente utilizar esta convención por el momento.

(2) Usando que $\frac{1}{2}|\mathcal{M}(Q)| \leq \rho(Q) \leq 4|\mathcal{M}(Q)|$ para todo cubo $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se puede verificar fácilmente que la [Definición 1.5](#) coincide con la presentada en la [Sección 1.2](#). En cualquier caso, dicha equivalencia quedará probada implícitamente cuando se demuestre el [Teorema 1.2](#) para la nueva noción de conjuntos débilmente porosos.

(3) Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, el hecho que $\Lambda_E(I) = \Lambda_{\bar{E}}(I)$ implica $\rho_E(I) = \rho_{\bar{E}}(I)$. Luego, E es débilmente poroso si y solo si $\bar{E}$ lo es. Notando además que $\text{dist}(\cdot, E) = \text{dist}(\cdot, \bar{E})$, esto permite suponer que un conjunto débilmente poroso E es cerrado cuando se deseen demostrar propiedades de sus pesos distancia asociados.

Introducimos la colección $\text{DP}(\mathbb{R})$ como el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formado por todos los E tales que E es (σ, γ) -d.p. para ciertos valores $\sigma, \gamma \in (0, 1)$. El siguiente resultado demuestra la inclusión $\Sigma_1(\mathbb{R}) \subseteq \text{DP}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.6. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío. Si existe $\alpha > 0$ tal que $w(x) := \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$ es un peso en $A_1(\mathbb{R})$, entonces E es débilmente poroso.*

Demostración. Dado un intervalo I en $\mathbb{R}$, si tuviéramos que $\rho(I) = 0$, esto implicaría que $\text{dist}(x, E) = 0$ para todo $x \in I$. Sin embargo, esto contradice la integrabilidad de $\text{dist}(x, E)^{-\alpha}$ en I . Más aún, el hecho que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in L^1(I)$ implica que

$$0 = |\{x \in I : \text{dist}(x, E)^{-\alpha} = \infty\}| = |\{x \in I : \text{dist}(x, E) = 0\}| = |I \cap \bar{E}|.$$

Luego, necesariamente se cumple $|\bar{E}| = 0$ y $\rho(I) > 0$ para todo intervalo I . Sea ahora $\gamma \in (0, 1)$ a elegir luego, fijemos un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y consideremos el conjunto

$$D_\gamma := \{x \in (1 - \gamma)I : \text{dist}(x, E) \geq \gamma\rho(I)\}.$$

Aquí, usamos la notación ηI para referirnos al intervalo cuyo centro coincide con el de I mientras que $|\eta I| = \eta|I|$. Por la [Proposición 1.4](#), existe $y^* \in I$ tal que

$$(y^* - \rho(I), y^* + \rho(I)) \subseteq I \setminus E,$$

por lo tanto, $y^* \in D_\gamma$ y $D_\gamma \neq \emptyset$. Notemos también que $\text{dist}(x, \mathbb{R} \setminus I) \geq \frac{\gamma}{2}|I| \geq \gamma\rho(I)$ para todo $x \in D_\gamma$. Luego, si $x \in (1 - \gamma)I \setminus D_\gamma$, entonces $\text{dist}(x, E) < \gamma\rho(I)$. Usando esto, podemos estimar

$$\int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \geq \int_{(1-\gamma)I \setminus D_\gamma} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \geq \gamma^{-\alpha} \rho(I)^{-\alpha} ((1 - \gamma)|I| - |D_\gamma|),$$

donde se utilizó que para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, se cumple $|A \setminus B| \geq |A| - |B|$. Despejando la desigualdad de arriba, vemos que

$$|D_\gamma| \geq (1 - \gamma)|I| - \gamma^\alpha \rho(I)^\alpha \int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx. \quad (1.4)$$

Por otro lado, si $y^* \in I$ es como arriba, usando la condición A_1 del peso w obtenemos

$$\begin{aligned} \int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1} \text{ess inf}_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \\ &\leq [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1} \text{dist}(y^*, E)^{-\alpha} \\ &= [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1} \rho(I)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Combinando con (1.4), se sigue que

$$|D_\gamma| \geq (1 - \gamma - \gamma^\alpha [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1})|I|.$$

Elegimos ahora una secuencia finita de puntos $x_1, \dots, x_k \in D_\gamma$ con la propiedad que $|x_i - x_j| \geq \gamma\rho(I)$ para todo $i \neq j$ y que si $x \in D_\gamma \setminus \{x_i\}_{i=1}^k$, entonces $|x_i - x| < \gamma\rho(I)$ para todo i (en otras

palabras, $\{x_i\}_{i=1}^k$ es un conjunto $\gamma\rho(I)$ -disperso maximal). Se sigue que, si para cada $i = 1, \dots, k$ tomamos $I_i := (x_i - \frac{1}{2}\gamma\rho(I), x_i + \frac{1}{2}\gamma\rho(I))$, entonces $I_i \subseteq I \setminus E$ (pues $x_i \in D_\gamma$) y

$$\sum_{i=1}^k |I_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |2I_i| \geq \frac{1}{2} |D_\gamma| \geq \frac{1}{2} (1 - \gamma - \gamma^\alpha [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1}) |I| \geq \sigma |I|$$

para cualquier $\sigma \leq \frac{1}{2}$ si tomamos γ suficientemente pequeño. Además, $|I_i| = \gamma\rho(I)$ y, por definición de los $x_1, \dots, x_k$, se tiene $I_i \cap I_j = \emptyset$. Esto es, la colección $\{I_i\}_{i=1}^k$ cumple con las propiedades 1.5.1, 1.5.2 y 1.5.3. Esto implica que E es $(\sigma, \frac{1}{2}\gamma)$ -débilmente poroso. ■

En la Sección 1.2 se discutió cómo la definición de porosidad débil considerada en [And+24] podía emplearse de forma inductiva para deducir una dependencia del tipo ley de potencias de la distribución de poros con respecto al poro maximal diádico. Es precisamente un resultado de esta índole el que precisamos en este momento para poder probar la implicación $1.2.2 \implies 1.2.1$ del Teorema 1.2. Lo que demostraremos es cómo la medida de Lebesgue de los denominados ε -entornos de un conjunto $E \in \text{DP}(\mathbb{R})$ decrece de manera proporcional con el valor de ε en un intervalo fijo I siempre y cuándo ε sea menor que el valor de la función de poro maximal de I . Para E fijo en $\text{DP}(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, denotamos por $E(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, E) < \varepsilon\}$ al ε -entorno de E . Si I es un intervalo cualquiera, escribimos $E_I(\varepsilon) := E(\varepsilon) \cap I$.

Lema 1.7. Sean $E \in \text{DP}(\mathbb{R})$ un conjunto cerrado y I un intervalo arbitrario con extremos $a < b$. Entonces, existen constantes $0 < p, q < 1$ que dependen únicamente de σ y γ tales que

$$|E_I(p\varepsilon)| \leq q|E_I(\varepsilon)| \quad (1.5)$$

uniformemente para todo $0 < \varepsilon < \rho(I)$.

Demostración. Comenzamos fijando $\varepsilon \in (0, \rho(I))$ y escribiendo

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{i \in \Gamma} (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i),$$

donde $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$ son las a lo sumo numerables componentes conexas de $E(\varepsilon)$. Observemos que, para todo $i \in \Gamma$, existe $e_i \in E$ contenido en $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$, por lo que $\tilde{b}_i - \tilde{a}_i \geq 2\varepsilon$. Luego, existen $K \in \mathbb{N}$ e intervalos $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^K$ tales que

$$E_I(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^K (a_j, b_j),$$

donde $(a_j, b_j) = (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \cap I$ para algún $i \in \Gamma$ y suponemos además que el orden de los índices j es tal que $a_1 < a_2 < \dots < a_K$. Dado que $\varepsilon < \rho(I)$, tenemos que $(a_j, b_j) \neq I$ para todo $j = 1, \dots, K$. Además, los intervalos (a_j, b_j) son disjuntos de a pares y $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$ salvo, quizás, en los casos $j = 1$ y $j = K$. Ahora bien, si definimos $\varepsilon' := \frac{\gamma}{4}\varepsilon$, vemos que

$$|E_I(\varepsilon) \setminus E_I(\varepsilon')| = \sum_{j=1}^K |(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')|. \quad (1.6)$$

Si $b_1 - a_1 < 2\varepsilon$, entonces $a_1 = a$ y $\text{dist}(b_1, E) \geq \varepsilon$ (dado que $b_1 \notin E(\varepsilon)$), consecuentemente, el intervalo $(b_1 + \varepsilon' - \varepsilon, b_1) = (b_1 + \varepsilon[\frac{\gamma}{4} - 1], b_1)$ no interseca con $E(\varepsilon')$. Notemos que en el caso

en que $b_1 + \varepsilon[\frac{\gamma}{4} - 1] \leq a$, tenemos que $|(a_1, b_1) \setminus E(\varepsilon')| = b_1 - a_1$. Si por el contrario sucede que $b_1 + \varepsilon[\frac{\gamma}{4} - 1] > a$, podemos estimar

$$\begin{aligned} |(a_1, b_1) \setminus E(\varepsilon')| &\geq |(b_1 + \varepsilon[\frac{\gamma}{4} - 1], b_1)| \\ &= \varepsilon[1 - \frac{\gamma}{4}] \frac{|(a_1, b_1)|}{|(a_1, b_1)|} \\ &\geq \frac{3}{8}(b_1 - a_1), \end{aligned}$$

donde en el último paso se utilizó que $b_1 - a_1 < 2\varepsilon$. Análogamente, si $b_K - a_K < 2\varepsilon$ es posible ver que $|(a_K, b_K) \setminus E(\varepsilon')| \geq \frac{3}{8}(b_K - a_K)$ realizando cambios mínimos en el argumento previo. A continuación, procedemos a obtener una cota similar para $|(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')|$ con $1 \leq j \leq K$ en el caso general en que $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$ mediante la estrategia ilustrada en la Figura 1.3. Notemos que $\text{dist}(a_j, E) \geq \varepsilon$ o $\text{dist}(b_j, E) \geq \varepsilon$ (nuevamente debido a que $(a_j, b_j) \neq I$). Supongamos sin pérdida de la generalidad que se cumple lo segundo, por lo tanto

$$(b_j - \varepsilon, b_j) \subseteq (a_j, b_j) \setminus E.$$

Luego, $\rho((a_j, b_j)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ y, dado que E es (σ, γ) -d.p., podemos hallar una colección de intervalos abiertos $\{I_i^j\}_{i=1}^N$, disjuntos dos en dos, cada uno contenido en $(a_j, b_j) \setminus E$, tales que $|I_i^j| \geq 2\gamma\rho((a_j, b_j)) \geq \gamma\varepsilon$ y $\sum_{i=1}^N |I_i^j| \geq \sigma(b_j - a_j)$. En particular, se sigue que $|I_i^j \setminus E(\varepsilon')| \geq \frac{1}{2}|I_i^j|$. Por lo tanto,

$$|(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')| \geq \sum_{i=1}^N |I_i^j \setminus E(\varepsilon')| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |I_i^j| \geq \frac{\sigma}{2} |I_i^j| = \frac{\sigma}{2} (b_j - a_j).$$

Combinando 1.6 con las estimaciones anteriores, obtenemos

$$|E_I(\varepsilon) \setminus E_I(\varepsilon')| \geq \min \left\{ \frac{3}{8}, \frac{\sigma}{2} \right\} \sum_{j=1}^K |(a_j, b_j)| =: (1 - q)|E_I(\varepsilon)|.$$

El lema queda por tanto demostrado al tomar $p := \frac{\gamma}{4}$. ■

Observaciones. (1) Dado que $\bar{E} = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, E) = 0\}$, podemos escribir

$$\bar{E} \cap I = \bigcap_{\varepsilon > 0} E_I(\varepsilon)$$

para cualquier intervalo I . Entonces, usando (1.5) y la continuidad de la medida de Lebesgue deducimos que

$$|\bar{E} \cap I| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |E_I(\varepsilon)| = 0$$

y, por lo tanto, $|E| \leq |\bar{E}| = 0$. En otras palabras, si $E \in \text{DP}(\mathbb{R})$, entonces E tiene medida nula.

(2) Se puede ver que (1.5) implica $|E_I(\varepsilon)| \lesssim (\frac{\varepsilon}{|I|})^\theta |I|$, donde las constantes C y θ dependen de p y q . Esto está relacionado con el control que tienen ya sea el poro maximal diádico o la función de poro maximal en la distribución del resto de poros y con el procedimiento inductivo de cubrimiento seguido por Anderson *et al.* e ilustrado en la Figura 1.2.

El Lema 1.7 es la herramienta clave que nos permitirá obtener la implicación restante del Teorema 1.2. Esto es gracias a que el decaimiento exponencial en medida de los entornos E_I posibilita obtener la estimación (1.2) en el caso que el intervalo I interseque con el conjunto E , que ciertamente es el caso más difícil de demostrar.

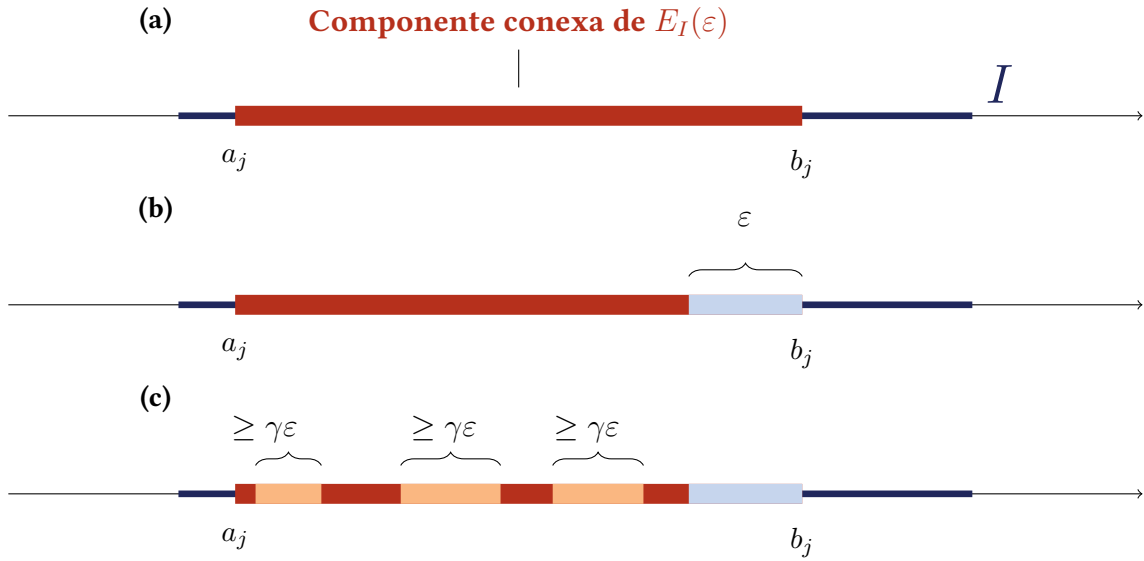


Figura 1.3: Considerada la componente conexa (a_j, b_j) de $E_I(\varepsilon)$ en el caso que $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$ (gráfico a), podemos suponer sin pérdida de la generalidad que el extremo b_j cumple $\text{dist}(b_j, E) \geq \varepsilon$. Luego, el intervalo $(b_j - \varepsilon, b_j)$ es un poro de E en (a, b) (gráfico b), y en particular podemos utilizar la propiedad de porosidad débil de E para cubrir al menos una fracción σ de (a_j, b_j) con poros de tamaño $\geq \gamma\varepsilon$ (gráfico c). Esto asegura que, al considerar un valor de ε' suficientemente pequeño, tengamos $|(a_j, b_j) \setminus E_I(\varepsilon')| \gtrsim |(a_j, b_j)|$.

Teorema 1.8. Sea E un conjunto (σ, γ) -d.p. en $\mathbb{R}$. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R})$. Más aún, la constante $[\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1}$ depende solo de σ, γ y α .

Demostración. Dado que $\text{dist}(\cdot, E) = \text{dist}(\cdot, \bar{E})$, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que E es cerrado. Para demostrar el lema, debemos hallar constantes $\alpha, C > 0$, independientes de la elección del intervalo I , tales que

$$\int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq C \text{ ess inf}_{x \in I} \text{dist}(x, E)^{-\alpha}.$$

Consideramos tres casos distintos en función de la posición relativa del intervalo I con respecto a E .

Caso I ($I \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(I, E) > 2|I|$): dados $x, y \in I$, por la desigualdad triangular se tiene

$$\text{dist}(x, E) \geq \text{dist}(y, E) - |x - y| \geq \text{dist}(y, E) - |I| \geq \text{dist}(y, E) - \frac{1}{2} \text{dist}(I, E) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(y, E).$$

Para $x \in I$, esto significa que $\text{dist}(x, E)^{-\alpha} \leq 2^\alpha \text{ess inf}_{y \in I} \text{dist}(y, E)^{-\alpha}$ para cualquier $\alpha > 0$ y, por lo tanto,

$$\int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq 2^\alpha \text{ess inf}_{y \in I} \text{dist}(y, E)^{-\alpha}.$$

Caso II ($I \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(I, E) \leq 2|I|$): basta con escribir $I^\circ = (a, b)$ y, suponiendo $0 < \alpha < 1$, realizar las siguientes estimaciones.

$$\begin{aligned}
 \int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \text{dist}(x, \partial I)^{-\alpha} dx \\
 &= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{-\alpha} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^{-\alpha} dx \right) \\
 &= \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{-\alpha} dx \\
 &= (1-\alpha) \left(\frac{b-a}{2} \right)^{-\alpha} \\
 &= (1-\alpha) \left(\frac{|I|}{2} \right)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Luego, para $0 < \alpha < 1$,

$$\int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq (1-\alpha) \left(\frac{|I|}{2} \right)^{-\alpha} = (1-\alpha) \rho(I)^{-\alpha}. \quad (1.7)$$

Para terminar la demostración de este caso, basta por lo tanto verificar que $\rho(I)^{-\alpha} \lesssim \text{ess inf}_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$ o, lo que es lo mismo, que $\rho(I) \gtrsim \text{dist}(x, E)$ para todo $x \in I$. Pero

$$\text{dist}(x, E) \leq |x - y| + \text{dist}(y, E) \leq |I| + \text{dist}(y, E)$$

para todo $y \in I$. Tomando ínfimo sobre y , obtenemos

$$\text{dist}(x, E) \leq |I| + \text{dist}(I, E) \leq 3|I| = \frac{3}{2}\rho(I),$$

tal y como queríamos.

Caso III ($I \cap E \neq \emptyset$): utilizaremos la colección de conjuntos $\{E_I(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ introducida en el [Lema 1.7](#) para estimar las correspondientes integrales. Supongamos que α es un número entre 0 y 1 a elegir con posterioridad. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &= \frac{1}{|I|} \left(\int_{E_I(\frac{1}{2}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx + \int_{I \setminus E_I(\frac{1}{2}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \right) \\
 &\leq \frac{1}{|I|} \left(\int_{E_I(\frac{1}{2}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx + \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\alpha} |I \setminus E_I(\frac{1}{2}\rho)| \right) \\
 &\leq \frac{1}{|I|} \int_{E_I(\frac{1}{2}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx + \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\alpha},
 \end{aligned}$$

donde $\rho := \rho(I)$. Podemos obtener una cota similar para la integral restante de la siguiente manera. Recordemos que $|E| = 0$ por la observación que sigue al [Lema 1.7](#).

$$\begin{aligned}
 \int_{E_I(\frac{1}{2}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_I(\frac{1}{2}p^k\rho) \setminus E_I(\frac{1}{2}p^{k+1}\rho)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \\
 &\leq \left(\frac{p}{2}\rho \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\alpha k} |E_I(\frac{1}{2}p^k\rho)| \\
 &\leq \left(\frac{p}{2}\rho \right)^{-\alpha} |E_I(\frac{1}{2}\rho)| \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-\alpha}q)^k \\
 &\leq C(\alpha) |I| \rho(I)^{-\alpha},
 \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$ suficientemente pequeño para asegurar que $p^{-\alpha}q < 1$, donde p y q son las constantes dadas por el [Lema 1.7](#). Hemos demostrado la existencia de constantes α y C tales que $\int_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq C \rho(I)^{-\alpha}$. Veamos que, al igual que en el caso anterior, esto implica la condición A_1 . Dado $x \in I$, puesto que E es cerrado, x está contenido en una componente conexa de $I \setminus E$ de la forma (c, d) . Tenemos que $(c, d) \neq I$ dado que $I \cap E \neq \emptyset$, por lo que o bien $c \in E$ o $d \in E$. En cualquier caso, se sigue que $\text{dist}(x, E) \leq d - c \leq 2\rho(I)$. Luego, $\rho(I)^{-\alpha} \lesssim \text{ess inf}_I \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$, lo que da por finalizada la demostración del Caso III. Por último, combinando las estimaciones obtenidas para cada uno de los casos se obtiene el resultado buscado. ■

Combinados, los [Teoremas 1.6](#) y [1.8](#) demuestran el [Teorema 1.2](#) en el caso unidimensional. La hipótesis $n = 1$ permitió obtener la desigualdad (1.5) con relativa rapidez, al facilitar la expresión de los conjuntos E_I como uniones de intervalos. Por esta razón, el mecanismo de prueba para la igualdad de los conjuntos $\text{DP}(\mathbb{R}) = \Sigma_1(\mathbb{R})$ es susceptible de ser generalizado a espacios abstractos de encontrarse una manera de adaptar el argumento usado para probar el [Lema 1.7](#). Dado que en los capítulos siguientes nos ocuparemos de replantear el [Problema 1.1](#) en el contexto de los *espacios de tipo homogéneo*, será suficiente emplear lemas de cubrimiento para verificar el decaimiento exponencial en medida de los ε -entornos de un conjunto d.p. E , así como recurrir a una casi-métrica con propiedades geométricas especialmente benignas e introducida por R. Macías y C. Segovia en [[MS81](#)]. Por lo tanto, el inconveniente de lidiar con particiones diádicas en estos espacios será sorteado mediante el uso de cubrimientos del tipo Whitney.

1.4 Pesos distancia A_p en la recta: el caso $p > 1$

El caso de los pesos distancia A_p con $p > 1$ merece una digresión aparte a lo discutido hasta este momento. Por supuesto que, dada la contención $A_1 \subseteq A_p$, los conjuntos débilmente porosos generan pesos en esta clase; pero ya en los trabajos [[And+24](#)] y [[Mud25](#)] se dieron a conocer ejemplos de conjuntos que no generan pesos distancia en la clase A_1 , pero sí en las clases A_p ; demostrando que la porosidad débil ya no caracteriza a estos conjuntos. Para construir estos ejemplos, los autores de esos artículos recurrieron a un método basado en la aplicación de una sucesión de traslaciones y dilataciones del conjunto $\{0, 1\}$ en la recta.

Sean $E_0 = \{0, 1\}$ y $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$ una sucesión de “constantes de contracción”. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente

$$E_n := E_{n-1} \cup E'_{n-1} \cup E''_{n-1},$$

donde E'_{n-1} es una copia trasladada de E_{n-1} y dilatada por el factor c_n , de forma tal que su primer punto coincide con el último punto de E_{n-1} ; mientras que E''_{n-1} es una copia idéntica de E_{n-1} trasladada de forma tal que su primer punto coincide con el último punto de E'_{n-1} . Finalmente, denotamos por

$$E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

y

$$E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = -E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$$

donde $-E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es la reflexión de $E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ a través del origen. Claramente, la naturaleza del conjunto $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ depende fuertemente de la sucesión de contracciones considerada. La [Figura 1.4](#) esquematiza tres de estos conjuntos obtenidos a partir de las sucesiones $c_n = 1$, $c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ y $c_n = \frac{1}{2}$.

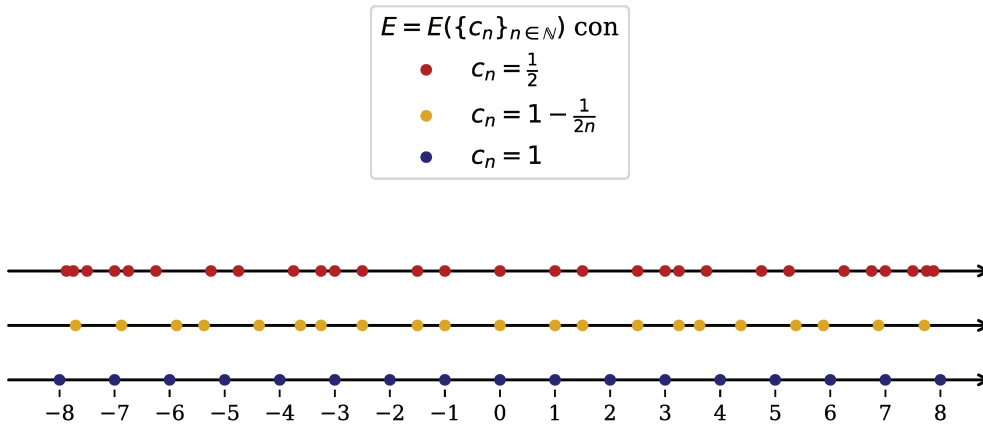


Figura 1.4: Puntos del conjunto $E = E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ contenidos en el intervalo $[-8, 8]$, correspondientes a las sucesiones (ordenadas de abajo hacia arriba) $c_n = 1$, $c_n = 1 - \frac{1}{2n}$ y $c_n = \frac{1}{2}$.

En los trabajos [And+24; Mud25] se encontró que el conjunto $E(\{1\}) = \mathbb{Z}$ es débilmente poroso, y por lo tanto admite pesos distancia en A_1 ; el conjunto $E(\{1 - \frac{1}{2n}\})$ cumple $\text{dist}(\cdot, E(\{1 - \frac{1}{2n}\}))^{-\alpha} \in A_p \setminus A_1$ para todo $0 < \alpha < 1$ y todo $1 < p < \infty$; mientras que $\text{dist}(\cdot, E(\{\frac{1}{2}\}))^{-\alpha}$ es un peso duplicante que no está contenido en $\bigcup_{p \geq 1} A_p$ para ninguna elección de $0 < \alpha < 1$. Esto muestra que los conjuntos $E(\{c_n\})$ son particularmente útiles para construir ejemplos de pesos en A_1 , A_p o meramente duplicantes dependiendo de la elección de la sucesión $\{c_n\}$, dando lugar a pesos más regulares a medida que la sucesión se aproxima a uno con mayor rapidez.

El problema de caracterización completa de los pesos distancia A_p (o más bien, de los conjuntos asociados) ha demostrado ser considerablemente más complejo que el del caso $p = 1$. De hecho, a pesar de los ejemplos mencionados, ninguna caracterización para $p > 1$ fue hallada hasta los posteriores trabajos [Góm26; PU25], siendo los resultados del primero de estos artículos los que conforman el núcleo del Capítulo 5. La razón de aplazar estas demostraciones se debe a que, incluso en el caso de la recta real, éstas son particularmente técnicas y exceden a los objetivos de este capítulo preliminar. No obstante, pretendemos en esta sección presentar algunas observaciones y heurísticas asociadas al problema A_p con el fin de introducir al lector desde ya en los temas que abordaremos más adelante.

Como discutimos en las primeras secciones, el rol de la función de poro maximal ρ_E fue clave en la caracterización de los conjuntos débilmente porosos puesto que ésta se halla íntimamente relacionada con los valores máximos de la función distancia a E en un determinado intervalo o bola, es decir, $\rho_E(B)^{-1} \simeq \text{ess inf}_B \text{dist}(x, E)^{-1}$. Sin embargo, la cantidad $\text{ess inf}_B \text{dist}(x, E)^{-1}$ ya no posee la misma relevancia en la condición A_p (de hecho, no figura explícitamente en la desigualdad (1.1)). Por esta razón, es necesario dar con una herramienta que sea de utilidad en el nuevo escenario. A este fin, consideremos el siguiente experimento intuitivo. Sea $E := \mathbb{N}_0$ y, dado un cubo⁷ arbitrario $Q_0 \subseteq \mathbb{R}$, denotemos por

$$\mathcal{D}_E(Q_0) = \{Q \in \mathcal{D}(Q_0) : Q \cap \bar{E} = \emptyset \wedge \pi Q \cap \bar{E} \neq \emptyset\}$$

a la familia formada por todos los cubos diádicos de Q_0 que no intersecan a $\bar{E}$ y que son maximales con respecto a esta propiedad, en el sentido que su primer ancestro πQ posee intersección no

⁷Por supuesto que con cubos en $\mathbb{R}$ nos referimos simplemente a intervalos semiabiertos, pero es conveniente mantener esta nomenclatura puesto que muchos de los puntos a discutir en esta sección aplican también al caso de $\mathbb{R}^n$.

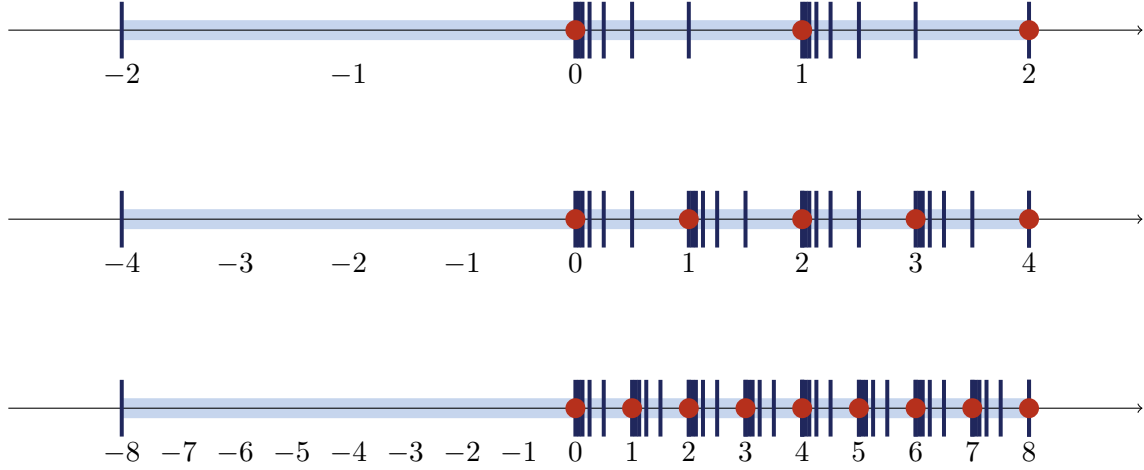


Figura 1.5: Esquema de las familias $\mathcal{D}_E(Q_N)$ para el conjunto $E = \mathbb{N}_0$ y los cubos (de arriba hacia abajo) $Q_N = [-N, N)$, $N = 2, 4, 6$. Los extremos de los subcubos diádicos de $\mathcal{D}_E(Q_N)$ son representados con segmentos verticales, mientras que los elementos de E figuran como puntos o circunferencias de color rojo. Claramente, el conjunto E no puede admitir pesos distancia no constantes en $A_p(\mathbb{R}^n)$ debido a que, sin importar el valor de $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya sea $\text{dist}(\cdot, E)^{-\theta}$ o $\text{dist}(\cdot, E)^{-\frac{\theta}{p-1}}$ adquiere valores muy grandes sobre fracciones no despreciables de los cubos Q_N .

vacía con $\bar{E}$. Los cubos pertenecientes a $\mathcal{D}_E(Q_N)$ se hallan esquematizados en la Figura 1.5 para $Q_N = [-N, N)$ con distintos valores de N .

En esta figura puede apreciarse una situación llamativa: una gran fracción (en medida) del cubo Q_N está cubierta por subcubos diádicos de gran tamaño relativo, al mismo tiempo que otra gran fracción se halla cubierta por subcubos diádicos de tamaño considerablemente menor, siendo mayor la diferencia de tamaño entre ambas poblaciones a medida que N aumenta. No es difícil ver que una situación como ésta imposibilita o interfiere con la condición A_p de los pesos distancia asociados a E . Esto se debe a que $\text{dist}(\cdot, E)$ toma valores grandes en cubos grandes, mientras que para $\text{dist}(\cdot, E)^{-1}$ ocurre lo opuesto. Supongamos, a modo de ejemplo, que $p = 2$. Luego, si $\theta < 0$, entonces el lado derecho de (1.1) para el peso $w(x) = \text{dist}(x, E)^\theta$ se comporta como⁸:

$$\underbrace{\left(\int_{Q(x,r)} \text{dist}(x, E)^\theta dy \right)}_{\text{crece con cubos pequeños}} \underbrace{\left(\int_{Q(x,r)} \text{dist}(x, E)^{-\theta} dy \right)}_{\text{crece con cubos grandes}},$$

mientras que si $\theta > 0$ tenemos en vez que

$$\underbrace{\left(\int_{Q(x,r)} \text{dist}(x, E)^\theta dy \right)}_{\text{crece con cubos grandes}} \underbrace{\left(\int_{Q(x,r)} \text{dist}(x, E)^{-\theta} dy \right)}_{\text{crece con cubos pequeños}}.$$

Lo anterior sugiere que una condición necesaria para que se cumpla $\text{dist}(\cdot, E)^\theta \in A_p(\mathbb{R}^n)$ (para algún valor de θ) debe involucrar cierto control sobre las fracciones de poros grandes y pequeños. Para poder describir formalmente a qué nos referimos con estas fracciones, es

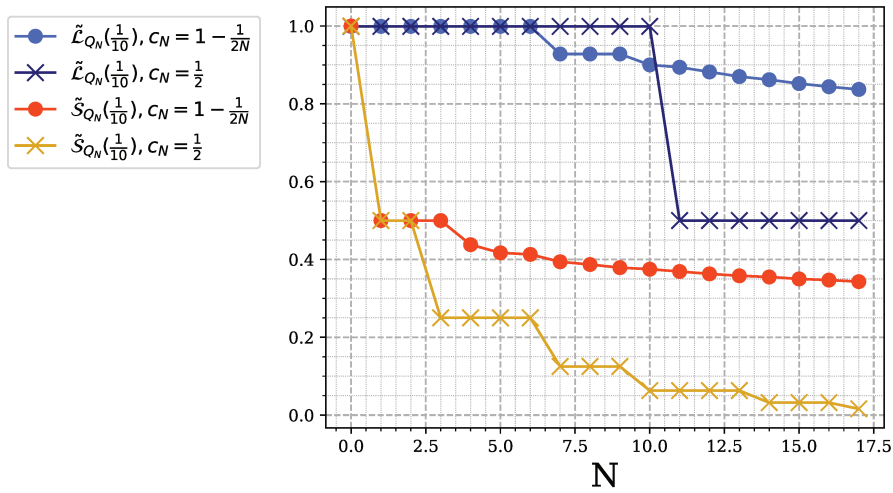
⁸A diferencia del caso $p = 1$, cuando $p > 1$ si es posible que $\text{dist}(\cdot, E)^\theta$ pertenezca a la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$ para valores positivos de θ , tal como ocurre en el ejemplo mencionado en el párrafo que precede inmediatamente al Problema 1.1.

conveniente introducir las siguientes funciones. Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, $Q_0 \subseteq \mathbb{R}$ cubo y $t \in (0, 1)$, definimos

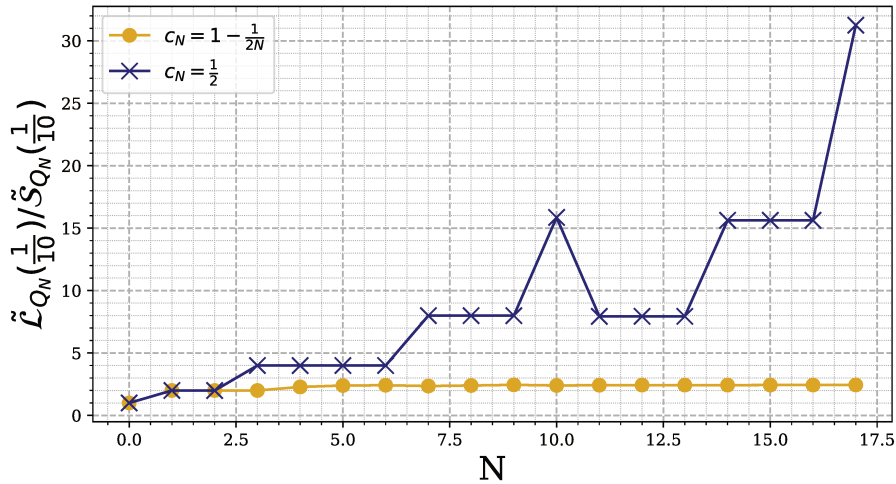
$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) := \sup \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}$$

y

$$\mathcal{S}_{Q_0}(t) := \inf \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}.$$



(a)



(b)

Figura 1.6: Valores de $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ (a) y relación $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_N}(\frac{1}{10})/\tilde{\mathcal{S}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ (b) en función de N para los conjuntos $E(\{c_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ que resultan de considerar las sucesiones $c_n = 1 - \frac{1}{2n}$ y $c_n = \frac{1}{2}$.

Intuitivamente, la función $\mathcal{L}_{Q_0}$ (respectivamente, $\mathcal{S}_{Q_0}$) evaluada en t devuelve la mayor (menor) longitud de lado entre aquellas longitudes asociadas a los poros más grandes (más pequeños) que, en conjunto, constituyen una fracción t del volumen total de $Q_0 \setminus \bar{E}$. Alternativamente, también

podríamos optar por utilizar las funciones

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t) := \sup \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}$$

y

$$\tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t) := \inf \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}$$

donde $\mathcal{C}_E(Q_0) = \{I : I \text{ es una componente conexa de } Q_0 \setminus E\}$. Las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ tienen la ventaja de poder definirse sin importar la dimensión del espacio, mientras que $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}$ solo tienen sentido en el caso unidimensional, aunque en términos prácticos son más sencillas de estimar. Por poner un ejemplo, consideremos nuevamente los conjuntos $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ introducidos al comienzo de esta sección. Sea ahora Q_N el mínimo cubo que contiene al conjunto E_N . La Figura 1.6 consta de los gráficos de los valores $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ en función de N calculados numéricamente para los conjuntos $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, usando las sucesiones $c_n = 1 - \frac{1}{2n}$ y $c_n = \frac{1}{2}$. La relación $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_N}(\frac{1}{10})/\tilde{\mathcal{S}}_{Q_N}(\frac{1}{10})$ parece tender a una constante cuando $c_n = 1 - \frac{1}{2n}$ (es decir, cuando el conjunto admite pesos distancia del tipo A_p), pero por el contrario esta relación parece aumentar sin límites en el caso de la sucesión $c_n = \frac{1}{2}$ (cuyos pesos distancia no pertenecen a ninguna clase $A_p(\mathbb{R})$).

Si bien no se han presentado demostraciones formales, se espera que lo discutido en esta sección sirva al lector para ganar cierta intuición sobre el comportamiento de los pesos distancia A_p y de sus conjuntos asociados, y particularmente que se advierta sobre la importancia de las fracciones de poros grandes y pequeños descritas por las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ (o, en todo caso, por las afines $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}$). En el Capítulo 5 demostraremos que éstas funciones describen adecuadamente a los conjuntos mencionados, hasta el punto de dar una caracterización completa de ellos y reminiscente a la condición de porosidad débil que gobierna al caso $p = 1$. Esta caracterización consiste en requerir que la relación $\tilde{\mathcal{L}}_Q(s)/\tilde{\mathcal{S}}_Q(s)$ esté acotada superiormente para todo cubo Q que interseque $\bar{E}$ y alguna constante $s \in (0, 1)$, como parece suceder en la Figura 1.6b para el conjunto $E(\{1 - \frac{1}{2n}\}_{n \in \mathbb{N}})$. Los dos capítulos siguientes proveen el marco teórico necesario y las herramientas esenciales antes de poder considerar las reversiones y generalizaciones mencionadas del Problema 1.1 aquí tratado: tanto para caracterizar los pesos distancia A_1 y A_p en espacios de tipo homogéneo (Capítulos 4 y 5) como para describir pesos distancia laterales en la recta (Capítulo 6).

Espacios de tipo homogéneo

Muchos autores coinciden en que los espacios de tipo homogéneo (ETH) tuvieron su cuna en los trabajos de R. Coifman & G. Weiss en la década de los 70, aunque probablemente la primera mención a los ETH haya sido en el artículo “Singular Integrals and Multipliers on Homogeneous Spaces” debido a Coifman y M. de Guzmán y publicado en la Revista de la Unión Matemática Argentina en el año 1970. Estos espacios generalizan a los euclídeos en más de un sentido al verse munidos simultáneamente de una cuasi-métrica d y una medida duplicante μ ; permitiendo así la extensión de múltiples conceptos y resultados propios del análisis real. Siendo la propuesta de esta tesis el estudio de problemas concernientes con los pesos distancia sobre esta clase de espacios, resulta indispensable proveer de un capítulo a modo de resumen que recoja las propiedades y los resultados esenciales para lograr su adecuada comprensión. Muchos de los conceptos a introducir en las próximas páginas son más bien conocidos en la rama del análisis armónico, hablamos por ejemplo de la topología dada por una cuasi-métrica, la validez de ciertos lemas de cubrimiento, las dimensiones de Hausdorff y de Minkowski, etc. Otros, sin embargo, corresponden a resultados menos conocidos. En este caso podemos mencionar la conexión entre la ya mencionada topología cuasi-métrica y la teoría de uniformidades así como la existencia de cuasi-métricas equivalentes con propiedades geométricas particularmente favorables.

Contenidos

2.1	Espacios uniformes	39
2.2	Métricas y cuasi-métricas	44
2.3	Nociones de dispersión y lemas de cubrimiento en espacios cuasi-métricos . . .	53
2.4	Espacios de tipo homogéneo	55
2.5	Dimensiones de Hausdorff y Minkowski	60
2.6	La cuasi-métrica de Macías y Segovia	62

2.1 Espacios uniformes

En lo que sigue introduciremos algunas nociones básicas sobre espacios uniformes, una clase de espacios topológicos que, entre otras cosas, permiten extender la definición de continuidad uniforme de funciones, de sucesiones de Cauchy y de completitud. A este fin, consideremos un conjunto no vacío y arbitrario X . Los subconjuntos del producto cartesiano $X \times X$ se denominan **relaciones**. Dadas dos relaciones $R, S \subseteq X \times X$, denotamos por

- ◇ $R^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in R\}$ (la *relación inversa* de R);
- ◇ $R \circ S = \{(x, z) \in X \times X : \text{existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R\}$ (la *composición* entre R y S).

Un ejemplo importante de relación es la denominada *identidad* $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$. En general, omitiremos mención al conjunto X y escribiremos simplemente $\Delta = \Delta(X)$ cuando esto no dé lugar a confusiones. El nombre de esta relación en particular viene del hecho que $\Delta^{-1} = \Delta$ y $\Delta \circ R = R \circ \Delta = R$ para toda relación $R \subseteq X \times X$. Por otro lado, toda función $f : X \rightarrow X$ es asimismo una relación en $X \times X$ y si $g : X \rightarrow X$ es otra función, entonces $f \circ g : X \rightarrow X$ es la composición usual entre funciones⁹.

La relación inversa se interpreta geométicamente como una “reflexión” de la relación original a través de la diagonal Δ (véase la Figura 2.1a). En cambio, la operación de composición es algo más difícil de intuir. Con el fin de esclarecer un poco su naturaleza, consideremos el siguiente ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.1 (Composición de relaciones). Sean $R, S \subseteq \mathbb{R}^2$ donde R es la relación puntual $R = \{(s, t)\}$ para ciertos números $s, t \in \mathbb{R}$. Por definición, tenemos que $(x, z) \in R \circ S$ si y solo si existe un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in S$ y $(y, z) \in R$. Pero entonces, se sigue de la segunda contención que $y = s$ y $z = t$. Luego,

$$R \circ S = \{(x, t) : (x, s) \in S\},$$

tal como se haya esquematizado en la Figura 2.1b.

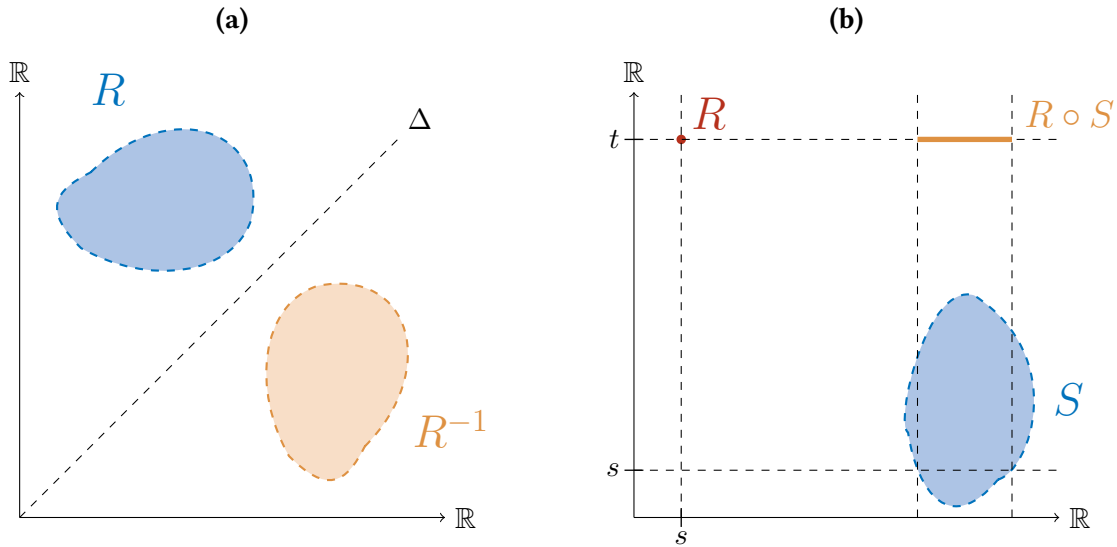


Figura 2.1: (a) Interpretación geométrica de la relación inversa. (b) Composición de dos relaciones R y S como las consideradas en el Ejemplo 2.1.

En general no trabajaremos con composiciones de relaciones arbitrarias, sino entre relaciones que contienen a la diagonal. En este caso, la operación de composición da como resultado una relación en cierto sentido mayor a la o las originales. Más precisamente, si $R \supset \Delta$ entonces $S \subseteq R \circ S$ y $S \subseteq S \circ R$, lo que se deduce del hecho que Δ es la identidad y de la propiedad de

⁹Aquí empleamos la definición usual de función $f : X \rightarrow Y$ en términos de pares ordenados en $X \times Y$.

monotonía 2.2.2 enunciada en el siguiente lema; que además recoge algunas otras propiedades básicas de esta operación.

Lema 2.2 (Propiedades básicas de la composición). *Sean $R, S, T \subseteq X \times X$ donde X es un conjunto no vacío. Denotamos por $\pi_1 U := \{x \in X : \exists y \in X \text{ tal que } (x, y) \in U\}$ y $\pi_2 U := \{y \in X : \exists x \in X \text{ tal que } (x, y) \in U\}$ para todo $U \in \mathcal{P}(X \times X)$. Entonces,*

$$2.2.1. R \circ S \subseteq (X \times \pi_2 R) \cap (\pi_1 S \times X);$$

$$2.2.2. \text{ Si } S \subseteq T, \text{ entonces } R \circ S \subseteq R \circ T \text{ y } S \circ R \subseteq T \circ R \text{ (monotonía);}$$

$$2.2.3. (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T) \text{ (asociatividad);}$$

$$2.2.4. (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \text{ (relación con la inversa).}$$

En las próximas páginas, deberemos lidiar con composiciones sucesivas de relaciones, por lo que es conveniente introducir el siguiente concepto. Una **cadena** (en X) es una secuencia finita y ordenada de elementos $(x_1, \dots, x_k)$ (no necesariamente distintos) en X y su longitud está dada por el entero k .

Lema 2.3. *Sea X un conjunto y sean $R_1, \dots, R_k$ relaciones en $X \times X$ donde $k \geq 2$. Entonces, $(x, y) \in R_1 \circ \dots \circ R_k$ si y solo si existe una cadena de longitud $k + 1$*

$$(x = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k = y)$$

en X tal que $(z_j, z_{j+1}) \in R_{k-j}$, para todo $0 \leq j < k$.

Demostración. En el caso $k = 2$, tenemos que $(x, y) \in R_1 \circ R_2$ si y solo si existe $w \in X$ tal que $(x, w) \in R_2$ y $(w, y) \in R_1$. Luego, el enunciado se sigue tomando $z_0 = x$, $z_1 = w$ y $z_2 = y$. Supongamos ahora que el enunciado vale para cierto natural k y consideremos la composición de $k + 1$ relaciones de la forma $R_1 \circ \dots \circ R_{k+1}$. Por la asociatividad de la operación de composición, tenemos que $(x, y) \in R_1 \circ \dots \circ R_{k+1} = (R_1 \circ \dots \circ R_k) \circ R_{k+1}$ si y solo si existe $w \in X$ tal que $(x, w) \in R_{k+1}$ y $(w, y) \in R_1 \circ \dots \circ R_k$. Por la hipótesis inductiva se sigue que podemos hallar una cadena

$$(w = z'_0, \dots, z'_k = y)$$

tal que $(z'_j, z'_{j+1}) \in R_{k-j}$ para todo $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Por lo tanto, es suficiente tomar $z_0 := x$ y $z_j := z'_{j-1}$ para $1 \leq j < k + 1$. ■

Observación: en el caso particular de una composición simétrica de relaciones de la forma

$$R_1 \circ \dots \circ R_k \circ S \circ R_k \circ \dots \circ R_1,$$

el Lema 2.3 adaptado a esta situación afirma que (x, y) pertenece a tal relación si y solo si existe una cadena de longitud $2(k + 1)$

$$(x = x_0, \dots, x_k, y_k, \dots, y_0 = y)$$

de elementos de X tal que

$$\begin{cases} (x_j, x_{j+1}) \in R_{j+1}, & 0 \leq j < k \\ (x_k, y_k) \in S, \\ (y_j, y_{j+1}) \in R_{j+1}, & 0 \leq j < k. \end{cases}$$

Definición 2.4. Dado un conjunto X , decimos que la familia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ es una **estructura uniforme** en X si

- 2.4.1. $\Delta \subseteq U$, para todo $U \in \mathcal{U}$;
- 2.4.2. si $U \in \mathcal{U}$ y $V \supset U$, entonces $V \in \mathcal{U}$;
- 2.4.3. $U \in \mathcal{U}$ si y solo si $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
- 2.4.4. si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$;
- 2.4.5. para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$.

Si X es un conjunto y $\mathcal{U}$ es una estructura uniforme en X , el par $(X, \mathcal{U})$ se denomina **espacio uniforme**. Ejemplos triviales de estructuras uniformes en X son las familias $\mathcal{U} = \{X \times X\}$ y $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(X \times X) : U \supset \Delta\}$. Por el momento, nos limitamos a observar que todo espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ admite una topología $\tau^{\mathcal{U}}$ inducida por $\mathcal{U}$. A saber,

$$\tau^{\mathcal{U}} = \{S \subseteq X : \text{para todo } x \in S, \text{ existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U(x) \subseteq S\},$$

donde se utilizó la notación $\Omega(x) = \{y \in \Omega : (x, y) \in \Omega\}$, para cualquier conjunto $\Omega \subseteq X \times X$. Claramente, $\emptyset$ y X pertenecen a $\tau^{\mathcal{U}}$ sin importar las propiedades de la familia $\mathcal{U}$, y lo mismo puede decirse sobre uniones arbitrarias de elementos de $\tau^{\mathcal{U}}$. De hecho, tan solo la propiedad 2.4.4 es necesaria para que se cumpla $S_1 \cap \dots \cap S_k \in \tau^{\mathcal{U}}$ siempre que $S_1, \dots, S_k \in \tau^{\mathcal{U}}$.

En general, y al igual que ocurre en el caso de las topologías, resulta conveniente trabajar con ciertas subfamilias de una dada estructura uniforme conocidas como **bases**. Más precisamente, dado un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, diremos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ es una base de $\mathcal{U}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. El siguiente resultado da a conocer las condiciones necesarias para que una colección arbitraria $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ sea base para una estructura uniforme en X .

Proposición 2.5. La familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X) \setminus \{\emptyset\}$ es base de una estructura uniforme en X si y solo si

- 2.5.1. $\Delta \subseteq B$, para todo $B \in \mathcal{B}$;
- 2.5.2. para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{B} \subseteq B^{-1}$;
- 2.5.3. si $B, \tilde{B} \in \mathcal{B}$, entonces existe $\tilde{\tilde{B}} \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{\tilde{B}} \subseteq B \cap \tilde{B}$;
- 2.5.4. para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{B} \circ \tilde{B} \subseteq B$.

Más aún, la estructura uniforme generada por $\mathcal{B}$ es

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{P}(X \times X) : B \subseteq U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

y, para cada $x \in X$, la colección

$$\mathcal{N}_x = \{B(x) : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de entornos de $\tau^{\mathcal{U}}$ en x .

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de $X \times X$ que satisface 2.5.1-2.5.4. Por definición de $\mathcal{U}$, para ver que $\mathcal{B}$ es base de esta colección basta con comprobar que $\mathcal{U}$ es una estructura uniforme en X . En efecto, se verifica:

- (2.4.1) si $U \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$ y por 2.5.1 $\Delta \subseteq B$, luego $\Delta \subseteq U$;
- (2.4.2) si $U \in \mathcal{U}$ y $V \supset U$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U \subseteq V$ y, por lo tanto, $V \in \mathcal{U}$;
- (2.4.3) si $U \in \mathcal{U}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$, lo que a su vez equivale a afirmar que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B^{-1} \subseteq U^{-1}$, pero por 2.5.2 esto implica a la existencia de $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{B} \subseteq U^{-1}$, lo cual se cumple si y solo si $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
- (2.4.4) si $U, V \in \mathcal{U}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subseteq U$ y $B_2 \subseteq V$, pero por 2.5.3, existe también $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq B_1 \cap B_2$, de lo que se sigue $B \subseteq U \cap V$ y $U \cap V \in \mathcal{U}$;
- (2.4.5) si $U \in \mathcal{U}$, por definición de $\mathcal{U}$ y por la condición 2.5.4 existen $B, \tilde{B} \in \mathcal{B}$ tales que $\tilde{B} \circ \tilde{B} \subseteq B \subseteq U$, siendo que $\tilde{B} \in \mathcal{U}$.

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ se define como en el enunciado a partir de una familia arbitraria $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$, las condiciones 2.5.1-2.5.4 pueden comprobarse con la misma facilidad. Por otro lado, si $U \in \tau^{\mathcal{U}}$ es entorno de $x \in X$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$ y, dado que $B \supset \Delta$, se tiene que $x \in B(x)$. En otras palabras, $\{B(x)\}_{B \in \mathcal{B}}$ es base de entornos para $\tau^{\mathcal{U}}$ alrededor del punto x . ■

Dada una función $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, consideremos las **g -bandas**

$$B_g(r) = \{(x, y) \in X \times X : g(x, y) < r\},$$

donde $r > 0$. Nuestro siguiente objetivo es determinar cuándo la colección de las g -bandas es base de una estructura uniforme, es decir, cuándo dicha colección cumple con las condiciones 2.5.1-2.5.4 de la Proposición 2.5. El próximo teorema provee condiciones suficientes para que éste sea el caso.

Teorema 2.6. Sea $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función tal que

2.6.1. $g|_{\Delta} = 0$;

2.6.2. existe $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ creciente y biyectiva tal que

$$g(x, y) \leq \phi(g(y, x))$$

para todo $x, y \in X$;

2.6.3. existe $\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ creciente y biyectiva tal que

$$g(x, y) \leq \lambda(\max\{g(x, z), g(z, y)\})$$

para todo $x, y, z \in X$.

Entonces, la familia $\{B_g(r)\}_{r>0}$ es base de la estructura uniforme

$$\mathcal{U}_g := \{U \in \mathcal{P}(X \times X) : B_g(r) \subseteq U \text{ para algún } r > 0\}$$

y

$$\tau^{\mathcal{U}} = \{S \subseteq X : \text{para todo } x \in S, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_g(x, r) \subseteq S\} =: \tau_g,$$

donde $B_g(x, r) = (B_g(r))(x) = \{y \in X : g(x, y) < r\}$ es la **g -bola** con centro en x y radio $r > 0$.

Demostración. Por la **Proposición 2.5**, es suficiente verificar que $\mathcal{B} := \{B_g(r)\}_{r>0}$ satisface las propiedades 2.5.1-2.5.4.

(2.5.1) Dado que $g|_{\Delta} = 0$, se tiene $\Delta \subseteq B_g(r)$, para todo $r > 0$.

(2.5.2) Notemos que, dado $r > 0$, $(x, y) \in B_g(r)^{-1}$ equivale a $g(y, x) < r$. Sea $s := \phi^{-1}(r)$, veamos que $B_g(s) \subseteq B_g(r)^{-1}$. En efecto, si $g(x, y) < s$, entonces $g(y, x) \leq \phi(g(x, y)) < \phi(s) = r$, esto es, $(x, y) \in B_g(r)^{-1}$.

(2.5.3) Basta con notar que $B_g(r) \cap B_g(s) = B_g(\min(\{r, s\}))$, para todo $r, s > 0$.

(2.5.4) Dado $r > 0$, afirmamos que $B_g(s) \circ B_g(s) \subseteq B_g(r)$ si tomamos $s := \frac{1}{2}\lambda^{-1}(r)$. Para comprobar esto, observemos primero que

$$B_g(s) \circ B_g(s) = \{(x, z) \in X \times X : \text{existe } y \in X \text{ tal que } g(x, y) < s \wedge g(y, z) < s\}.$$

Luego, si $(x, z) \in B_g(s) \circ B_g(s)$ y $y \in X$ es tal que $g(x, y) < s$ y $g(y, z) < s$, se sigue que

$$g(x, z) \leq \lambda(\max(\{g(x, y), g(y, z)\})) \leq \lambda(g(x, y) + g(y, z)) < \lambda(2s) = r.$$

En otras palabras, $(x, z) \in B_g(r)$.

■

Ejemplos sencillos de funciones que cumplen con las condiciones 2.6.1-2.6.3 del teorema anterior son $g_1(x, y) = 0$ y $g_2(x, y) = \mathbb{1}_{(X \times X) \setminus \Delta}(x, y)$, donde $\mathbb{1}_{\Omega}$ es la función característica de un conjunto $\Omega \subseteq X \times X$. Para verificar esto basta con tomar $\phi(x) = \lambda(x) = x$ en ambos casos. Notemos que las bolas asociadas a g_1 toman la forma $B_{g_1}(x, r) = X$, para todo par $(x, r) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$; mientras que las g_2 -bolas cumplen $B_{g_2}(x, r) = \{x\}$ si $r < 1$, o $B_{g_2}(x, r) = X$ si $r \geq 1$. En particular, $\tau_{g_1} = \{\emptyset, X\}$ puesto que sus únicos entornos constan del conjunto total X mientras que $\tau_{g_2} = \mathcal{P}(X)$ puesto que todo conjunto puntual es entorno en esta topología.

2.2 Métricas y cuasi-métricas

A partir de ahora y hasta finalizar este capítulo, supondremos que X es un conjunto arbitrario con al menos dos elementos, con el fin de evitar escenarios triviales. La siguiente definición permite introducir la noción de *distancia* o *cuasi-distancia* entre elementos de X .

Definición 2.7. Dada una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, diremos que d es una **cuasi-métrica** en X si se cumplen las siguientes condiciones:

2.7.1. si $x, y \in X$, entonces $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;

2.7.2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

2.7.3. existe una constante positiva K tal que

$$d(x, z) \leq K[d(x, y) + d(y, z)],$$

para todo $x, y, z \in X$.

La constante K que aparece en la condición 2.7.3 se denomina *constante triangular* de d . Naturalmente, $K \geq 1$ dado que 2.7.3 implica $d(x, z) \leq Kd(x, y)$ si tomamos $y = x$, y eligiendo $z \neq x$ se sigue la desigualdad buscada. Las constantes triangulares de una dada cuasi-métrica no son únicas; de hecho, si $K < K' < \infty$, se sigue inmediatamente que K' es también una constante triangular de d . Por este motivo, es a menudo preferible trabajar con la denominada *constante triangular óptima* de d definida como

$$K_d = \inf\{K > 0 : K \text{ es una constante triangular de } d\}$$

$$= \sup_{\substack{x, y, z \in X \\ (x, z) \neq (z, y)}} \frac{d(x, y)}{d(x, z) + d(z, y)}.$$

En el caso $K_d = 1$, vale la desigualdad triangular estándar para d y consecuentemente decimos que d es una **métrica**. Si d es una cuasi-métrica (métrica), el par (X, d) se denomina **espacio cuasi-métrico** (métrico) y su topología viene dada por la topología uniforme¹⁰

$$\tau_d = \{S \subseteq X : \text{para todo } x \in S, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_d(x, r) \subseteq S\},$$

que resulta de aplicar el Teorema 2.6 a la función d . Notemos que τ_d coincide con la topología métrica usual en el caso que d sea una métrica en X . De esta forma, los espacios cuasi-métricos quedan comprendidos dentro de la teoría general de espacios uniformes.

Dado un subconjunto no vacío $Y \subseteq X$, donde (X, d) es un espacio cuasi-métrico, consideremos $d_* : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $d_*(x, y) = d(x, y)$ para todo par $x, y \in Y \times Y$. Esta no es más que la restricción de d sobre el subconjunto Y , por lo que el par (Y, d_*) es un nuevo espacio cuasi-métrico que cumple¹¹ $K_{d_*} \leq K_d$. Más aún, la topología τ_{d_*} en Y coincide con la heredada de X .

Un concepto muy importante en el área de los espacios cuasi-métricos y que será ampliamente utilizado en el desarrollo de esta tesis es el de **equivalencia** entre cuasi-métricas. Dadas dos cuasi-métricas d y d' en X , decimos que son equivalentes entre sí y denotamos $d \sim d'$ si y solo si existen dos constantes $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tales que

$$C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 d(x, y), \quad (2.1)$$

para todo $x, y \in X$. A menudo utilizaremos la notación abreviada $d \sim_{C_1, C_2} d'$ para indicar que $d \sim d'$ según (2.1). No es difícil ver que $\sim$ define una relación de equivalencia en el conjunto de cuasi-métricas en X . Esto es, si

$$\mathcal{D}(X) = \{d : d \text{ es una cuasi-métrica en } X\}$$

entonces podemos reducir este conjunto al cociente $\mathcal{D}(X)/\sim$ formado por las correspondientes clases de equivalencia. Si $d \sim_{C_1, C_2} d'$, entonces las bolas asociadas a cada cuasi-métrica se relacionan como

$$B_{d'}(x, C_1 r) \subseteq B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, C_2 r) \quad (2.2)$$

para todo par $(x, r) \in X \times \mathbb{R}_{>0}$. Usando las contenciones en (2.2), se puede demostrar fácilmente la igualdad entre las topologías $\tau_d = \tau_{d'}$. Esto nos dice que reemplazar cuasi-métricas equivalentes no modifica la topología del espacio. Un ejemplo de propiedad que sí es sensible a un cambio de cuasi-métricas equivalentes es la condición que las bolas sean conjuntos abiertos, lo que es equivalente a que el conjunto de todas las bolas forme una base para la topología cuasi-métrica.

¹⁰Aquí es suficiente utilizar $\phi(t) = t$ y $\lambda(t) = Kt$ para demostrar los ítems 2.6.2 y 2.6.3 a partir de 2.7.2 y 2.7.3.

¹¹Probablemente el caso más extremo ocurre cuando $Y = \{y\}$ para cierto $y \in X$, es decir, cuando Y es un conjunto puntual. En esta situación, se tiene $K_{d_*} = 0$.

Proposición 2.8. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes.

2.8.1. Las d -bolas son abiertas en τ_d .

2.8.2. La colección $\{B_d(x, r)\}_{x \in X, r > 0}$ forma una base de τ_d .

Ejemplo 2.9 (Cuasi-métrica equivalente con pérdida de la propiedad 2.8.1). Sea $(\mathbb{R}, d)$ el espacio cuasi-métrico formado al tomar d como la distancia usual en la recta. Si ahora definimos

$$d'(x, y) := \begin{cases} |x - y|, & |x - y| \leq 1 \\ |x - y| + 1, & |x - y| > 1, \end{cases}$$

entonces d' es una nueva cuasi-métrica equivalente a d (y en particular induce la misma topología). Sin embargo, y tal como se ilustra en la Figura 2.2, la d' -bola $B_{d'}(0, \frac{3}{2})$ coincide con el conjunto $[-1, 1]$, que no es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$.

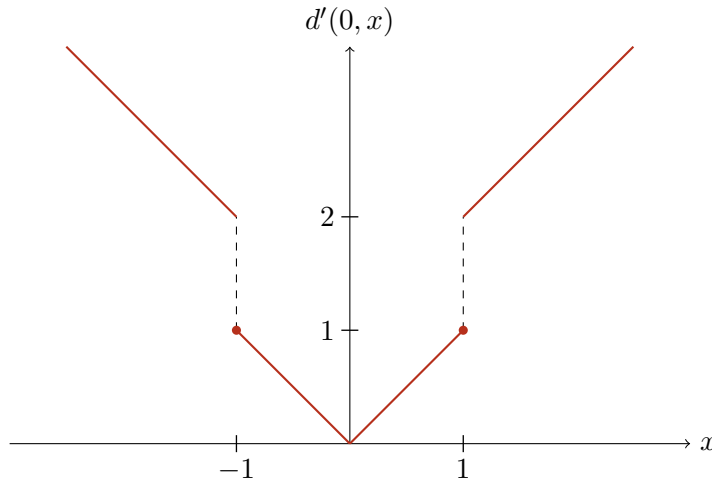


Figura 2.2: Distancia al origen medida a partir de la métrica d' introducida en el Ejemplo 2.9.

Como ya se había adelantado, el ejemplo anterior demuestra que la propiedad de tener a las bolas como base de la topología inducida por una cuasi-métrica no necesariamente se preserva en una misma clase de equivalencia. Aún así, existen muchos problemas que, al plantearse en un dado espacio (X, d) , su solución resulta ser invariante ante cambios de cuasi-métricas equivalentes. Por este motivo, una herramienta a menudo utilizada para resolver el problema en cuestión consiste en buscar, dentro de la clase $[d]$, un representante con propiedades especialmente benignas, para así replantear el problema considerando esta nueva cuasi-métrica. Con esto en mente, dedicaremos nuestro esfuerzo a demostrar que toda clase contiene un elemento de la forma ρ^β , donde ρ es una métrica en X ; en otras palabras, toda cuasi-métrica es equivalente a una potencia de un métrica. Por otro lado, en la Sección 2.6, se dará a conocer la existencia de un representante δ con la propiedad de que las δ -bolas asociadas resultan ser altamente regulares.

Del mismo modo en que una topología se dice metrizable si coincide con la topología τ_ρ inducida por una métrica ρ , existe una noción de metrizabilidad o, incluso, pseudo-metrizabilidad de estructuras uniformes que introducimos a continuación.

Definición 2.10. Una función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se denomina **pseudo-métrica** en X si

2.10.1. $\rho(x, x) = 0$ para todo $x \in X$ (en particular, no necesariamente se cumple que $\rho(x, y) = 0$ implica $x = y$);

2.10.2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

2.10.3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Definición 2.11. Una estructura uniforme $\mathcal{U}$ en X se dice **pseudo-metrizable** (respectivamente, **metrizable**) si existe una pseudo-métrica (métrica) ρ en X tal que la familia de ρ -bandas $\{B_\rho(r)\}_{r>0}$ es una base de $\mathcal{U}$.

En el caso general de una estructura uniforme $\mathcal{U}$ arbitraria, el siguiente resultado, debido a A. Huke-Frink, permite la construcción de una pseudo-métrica a partir de los elementos de una familia numerable $\{U_n\}$. Luego, la conexión con la eventual metrizabilidad de $\mathcal{U}$ se sigue de aplicar este resultado sobre una base numerable asociada a esta misma estructura uniforme.

Lema 2.12 (Lema de metrización de Frink). *Supongamos que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una colección de subconjuntos de $X \times X$ que satisface*

2.12.1. $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = X \times X$;

2.12.2. *para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta \subseteq U_n$;*

2.12.3. *para cada $n \in \mathbb{Z}$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n$.*

Entonces, existe $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

2.12.4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *para todo $x, y, z \in X$;*

2.12.5. $U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \leq 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$.

Más aún, si cada U_n es simétrico, entonces ρ es una pseudo-métrica en X . Si además $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \Delta$, entonces ρ es una métrica en X .

Demostración. Usando las propiedades 2.12.2 y 2.12.3, vemos que

$$U_{n+1} = \Delta \circ U_{n+1} \circ \Delta \subseteq U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq U_n,$$

donde se utilizó además la propiedad de monotonía 2.2.2. Esto significa que la familia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es no creciente (con respecto a la inclusión de conjuntos) en función de n . En particular, dados $x, y \in X$, esto en combinación con 2.12.1 nos permite introducir el índice

$$\eta(x, y) := \sup\{n \in \mathbb{Z} : (x, y) \in U_n\},$$

a partir del cual definimos la función $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ según la asignación $(x, y) \mapsto 2^{-\eta(x, y)}$ y tomando por convención $2^{-\infty} = 0$. Dada una cadena arbitraria $(x_0, \dots, x_n) \subseteq X$, afirmamos que la función ϕ satisface

$$\phi(x_0, x_n) \leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i, x_{i+1}) \quad (2.3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para demostrar (2.3), notemos en primer lugar que el caso $n = 1$ (cadenas de longitud 2) es inmediato y procedamos por inducción. Supongamos por lo tanto que (2.3) es

válido para cualquier cadena de longitud menor o igual que $n + 1$ y consideremos la cadena $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1})$ de longitud $n + 2$. Sea

$$S = \sum_{i=0}^n \phi(x_i, x_{i+1}).$$

Si $S = 0$, esto implica que $(x_i, x_{i+1}) \in U_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Luego, aplicaciones sucesivas de 2.12.3 permiten verificar que $(x_0, x_{n+1}) \in U_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y, consecuentemente, $\phi(x_0, x_{n+1}) = 0$ (tras lo cual (2.3) se cumple trivialmente para cadenas de longitud $n + 2$). Supongamos ahora que $S > 0$ y denotemos

$$k := \min \left\{ l \in \{0, \dots, n\} : \sum_{i=0}^l \phi(x_i, x_{i+1}) > \frac{1}{2}S \right\}.$$

Si $1 \leq k \leq n-1$, se sigue tanto que $\sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{1}{2}S$ como que $\sum_{i=k+1}^n \phi(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{1}{2}S$. Ahora bien, dado que sendas cadenas $(x_0, \dots, x_k)$ y $(x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$ son de longitud menor o igual que $n + 1$, la hipótesis inductiva implica

$$\phi(x_0, x_k) \leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i, x_{i+1}) \leq S$$

y

$$\phi(x_{k+1}, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \phi(x_i, x_{i+1}) \leq S.$$

Además, tenemos que $\phi(x_k, x_{k+1}) \leq S$ se cumple de forma trivial. Sea ahora m el número entero que satisface $2^{-m} \leq S < 2^{-m+1}$. Por definición de la función ϕ , se sigue que $\phi(y, z) \leq 2^{-m}$ y, por lo tanto, $(y, z) \in U_m$ para $(y, z) \in \{(x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_{n+1})\}$. Luego, $(x_0, x_{n+1}) \in U_m \circ U_m \circ U_m \subseteq U_{m-1}$ y $\phi(x_0, x_{n+1}) \leq 2^{-m+1} \leq 2S$. Los casos $k = 0$ y $k = n$ se siguen mediante un procedimiento análogo, utilizando que o bien $\phi(x_0, x_1) > \frac{1}{2}S$ o $\phi(x_n, x_{n+1}) > \frac{1}{2}S$ y teniendo en cuenta la inclusión $U_m \circ U_m \subseteq U_m \circ U_m \circ U_m$.

Una vez probado (2.3), introducimos una nueva función ρ definida en $X \times X$ como

$$\rho(x, y) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \phi(x_i, x_{i+1}) : (x_0, \dots, x_{n+1}) \text{ es una cadena con } x_0 = x \wedge x_{n+1} = y \right\}.$$

Veamos que ρ cumple con las propiedades del enunciado. Claramente, ρ es no negativa y además es finita dado que $\rho(x, y) \leq \phi(x, y)$. Por otro lado, dados $x, y, z \in X$ y $\varepsilon > 0$, podemos hallar cadenas $(x_0, \dots, x_m)$ y $(x_m, \dots, x_{m+k})$ tales que $x_0 = x$, $x_m = y$, $x_{m+k} = z$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \phi(x_i, x_{i+1}) < \rho(x, y) + \varepsilon$$

y

$$\sum_{i=m}^{m+k-1} \phi(x_i, x_{i+1}) < \rho(y, z) + \varepsilon.$$

Luego,

$$\rho(x, z) \leq \sum_{i=0}^{m+k-1} \phi(x_i, x_{i+1}) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + 2\varepsilon,$$

lo que demuestra 2.12.4.

Por otro lado, si $(x, y) \in U_n$, entonces $\rho(x, y) \leq \phi(x, y) \leq 2^{-n}$. Ahora, si $\rho(x, y) \leq 2^{-n}$ se sigue que $\phi(x, y) \leq 2\rho(x, y) \leq 2^{1-n}$ debido a (2.3), es decir, $(x, y) \in U_{n-1}$. Esto prueba 2.12.5, lo que a su vez implica $\rho(x, x) = 0$ para todo $x \in X$ si se tiene en cuenta que $(x, x) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Si tenemos además que los conjuntos U_n son simétricos, entonces las funciones η , ϕ y ρ son simétricas. Luego, en este caso ρ es una pseudo-métrica. Por último, asumiendo la hipótesis adicional que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \Delta$, si $(x, y) \in X \times X$ cumplen $\rho(x, y) = 0$, esto significa que $\phi(x, y) = 0$, si y solo si $(x, y) \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En otras palabras, $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \Delta$ y se tiene que $x = y$, por lo tanto ρ es una métrica. ■

Teorema 2.13. *Una estructura uniforme $\mathcal{U}$ en X es pseudo-metrizable si y solo si admite una base numerable. Más aún, $\mathcal{U}$ es metrizable si y solo si admite una base numerable tal que la intersección de todos sus elementos coincide con Δ .*

Demostración. Observemos en primer lugar que si $\mathcal{U}$ es pseudo-metrizable y ρ es como en la Definición 2.11, entonces $\{B_\rho(2^n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base numerable de $\mathcal{U}$. Además, en el caso que $\mathcal{U}$ sea metrizable, la intersección de los elementos de esta base es Δ . Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de $\mathcal{U}$. Notemos que definiendo una nueva base según $B'_1 = B_1$ y $B'_n = \bigcap_{i=1}^n B_i$ para cada $n \geq 2$, podemos asumir sin pérdida de la generalidad que la base original $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es no creciente. A continuación, construiremos a partir de $\mathcal{B}$ una nueva base numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formada por conjuntos simétricos y que cumpla 2.12.1, 2.12.2 y 2.12.3.

En primer lugar, tomamos $U_1 := B_1 \cap B_1^{-1}$ y notamos que U_1 es simétrico¹² y que pertenece a $\mathcal{U}$ debido a 2.4.3 y 2.4.4. Sea $k_1 = 1$. Luego, asumiendo que el elemento U_n ha sido definido para cierto $n \geq 1$, aplicando dos veces 2.4.5 podemos hallar $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $V \circ V \subseteq U_n$ y $W \circ W \subseteq V$. Tenemos entonces que

$$W \circ W \circ W \subseteq W \circ W \circ W \circ W \subseteq U_n.$$

Pero dado que $\mathcal{B}$ es base no creciente de $\mathcal{U}$, podemos elegir un natural $k_{n+1} > k_n$ tal que $B_{k_{n+1}} \subseteq W$ y, tomando $U_{n+1} := B_{k_{n+1}} \cap B_{k_{n+1}}^{-1}$, se sigue que

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subseteq B_{k_{n+1}} \circ B_{k_{n+1}} \circ B_{k_{n+1}} \subseteq U_n.$$

De esta forma, la sucesión $U_1, U_2, \dots$ satisface 2.12.2 y 2.12.3 por construcción. Además, si tomamos $U_n = X \times X$ para todo $n \leq 0$, entonces $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una familia de subconjuntos simétricos de $X \times X$ que cumple con todas las hipótesis del Lema de metrización de Frink. En consiguiente, existe una pseudo-métrica ρ que cumple 2.12.5 para todo entero n , lo que a su vez implica que $\mathcal{U}$ es pseudo-metrizable dado que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base de $\mathcal{U}$. Esto último se sigue del hecho que $\mathcal{B}$ era base de $\mathcal{U}$ y para cada $B_n \in \mathcal{B}$, podemos elegir $k_j > n$ tal que $U_j \subseteq B_{k_j} \subseteq B_n$.

Por último, si asumimos además que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Delta$, entonces

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{k_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Delta$$

y, en consecuencia, ρ es una métrica. ■

Como es de esperarse, nuestro interés reside principalmente en el estudio de los espacios cuasi-métricos y, particularmente, de su carácter métrico. En este sentido, es posible modificar el Teorema 2.13 para adecuarlo al caso particular en que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_g$, es decir, cuando la estructura esté inducida por una función g definida en $X \times X$, y que bien podría ser una cuasi-métrica.

¹²En efecto, la relación $R \cap R^{-1}$ es siempre simétrica sin importar la elección de $R \subseteq X \times X$.

Teorema 2.14. Sea $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función simétrica tal que $g(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ y supongamos además que g satisface 2.6.3 con $\lambda(t) := (1 + \varepsilon)t$, para cierto $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una métrica ρ en X tal que, si $[s]$ denota la parte entera del número real s y $\Lambda := \lambda^{-1} \circ \lambda^{-1}$,

$$\Lambda \circ \Lambda^{\lfloor \log_2 \rho(x, y)^{-1} \rfloor}(1) \leq g(x, y) \leq \Lambda^{-1} \circ \Lambda^{\lfloor \log_2 \rho(x, y)^{-1} \rfloor}(1). \quad (2.4)$$

Consecuentemente, la estructura uniforme $\mathcal{U}_g$ es metrizable.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideremos el conjunto $U_n := \{(x, y) \in X \times X : g(x, y) < C_n\}$, donde $C_0 = 1$ y $C_n = \lambda^{(-2n)}(1)$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aquí utilizamos la notación

$$\lambda^{(k)} = \begin{cases} \lambda \circ \dots \circ \lambda \text{ } k\text{-veces} & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ \lambda^{-1} \circ \dots \circ \lambda^{-1} \text{ } |k|\text{-veces} & \text{si } -k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Por simetría de la función g , se sigue que cada U_n es simétrico, y puesto que $g(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, tenemos también que $\Delta \subseteq U_n$. Además, dado que $\lambda^{(-2n)}(1) = (1 + \varepsilon)^{-2n}$ para $n \neq 0$, se cumple $C_n \searrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $C_n \nearrow \infty$ cuando $n \rightarrow -\infty$, de lo cual se deduce que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} U_n = \Delta$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U_n = X \times X$. Veamos ahora que la colección de los U_n cumple con la condición 2.12.3. En efecto, por el Lema 2.3 tenemos que

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} = \{(x, w) \in X \times X : \exists y, z \in X \text{ tales que } g(x, y), g(y, z), g(z, w) < C_{n+1}\}.$$

Luego, si $(x, w) \in U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1}$ y $y, z \in X$ son como arriba, entonces 2.6.3 implica

$$\begin{aligned} g(x, w) &\leq \lambda(\max\{g(x, y), g(y, w)\}) \\ &\leq \lambda(\max\{g(x, y), \lambda(\max\{g(y, z), g(z, w)\})\}) \\ &\leq \lambda^{(2)}(\max\{g(x, y), g(y, z), g(z, w)\}) \\ &\leq \lambda^{(2)}(C_{n+1}) \\ &= \lambda^{(-2n)}(1) \\ &= C_n. \end{aligned}$$

En otras palabras, $(x, w) \in U_n$ y 2.12.3 está probado. El Lema 2.12 aplicado a la familia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ señala la existencia de una métrica ρ en X que además satisface

$$U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \leq 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular, si $x, y \in X$ son tales que $\rho(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$, entonces $g(x, y) < C_{n-1}$; mientras que si $\rho(x, y) > \frac{1}{2^{n+1}}$, se sigue que $g(x, y) \geq C_{n+1}$. Luego, fijando un par $(x, y) \in X \times X$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{1}{2^{n+1}} < \rho(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$, a saber, $n := \lceil -\log_2(\rho(x, y)) \rceil$. De lo anterior, se deduce

$$\lambda^{(-2)} \circ \lambda^{(-2n)}(1) < g(x, y) \leq \lambda^{(2)} \circ \lambda^{(-2n)}(1),$$

que coincide con (2.4). ■

Las desigualdades en (2.4) ponen de manifiesto una cierta equivalencia entre la función g y una potencia de la métrica ρ . Esto queda claro en la demostración del siguiente enunciado, cuyas referencias principales son los trabajos [MS79; Gus74].

Corolario 2.15. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. Entonces, existe una métrica ρ en X y un exponente positivo $\beta = \beta(K_d)$ tal que $d \sim \rho^\beta$. En particular, toda clase de equivalencia $[d]$ en $\mathcal{D}(X)/\sim$ contiene un elemento d' tal que las d' -bolas forman una base de $\tau_{d'} = \tau_d$.

Demostración. Si d es una métrica, el enunciado se sigue de tomar $\rho = d$ y $\beta = 1$. Caso contrario, tenemos que $K_d > 1$ y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.14 con $\lambda(t) := K_d t$. Aplicando este resultado para hallar la métrica ρ enunciada y teniendo en cuenta que $\Lambda(t) = \lambda^{-1} \circ \lambda^{-1}(t) = K_d^{-2} t$, se sigue

$$\begin{aligned} K_d^{-2} \rho(x, y)^{2 \log_2 K_d} &= K_d^{-2} 2^{-2 \log_2 K_d \log_2 \frac{1}{\rho(x, y)}} \\ &= K_d^{-2 \left(1 + \log_2 \frac{1}{\rho(x, y)} \right)} \\ &\leq K_d^{-2 \left(1 + \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\rho(x, y)} \right\rfloor \right)} \\ &\leq d(x, y) \\ &\leq K_d^{-2 \left(\left\lceil \log_2 \frac{1}{\rho(x, y)} \right\rceil - 1 \right)} \\ &\leq K_d^{-2 \left(\log_2 \frac{1}{\rho(x, y)} - 2 \right)} \\ &= K_d^4 2^{-2 \log_2 K_d \log_2 \frac{1}{\rho(x, y)}} \\ &= K_d^4 \rho(x, y)^{2 \log_2 K_d}, \end{aligned}$$

por lo que el resultado se cumple con $\beta = 2 \log_2 K_d$. ■

Antes de finalizar esta sección, optamos por describir una equivalencia conceptual descrita por primera vez por H. Aimar en [Aim10]. Hemos hecho referencia a las g -bandas $B_g(r)$ asociadas a una función $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con anterioridad. En particular, estas bandas están bien definidas cuando reemplazamos la función genérica g por una cuasi-métrica d , pero más interesante aún es el hecho que es posible axiomatizar estos sistemas de bandas para independizarlos de cualquier función definida en $X \times X$, y que la existencia de uno de estos sistemas en un conjunto X es equivalente a la existencia de una cuasi-métrica en el mismo conjunto.

Definición 2.16. Dado un conjunto X , entendemos por **sistema de bandas** en X a una función $V : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$ que cumple:

- 2.16.1. $V(r) \subseteq V(s)$, para todo $r \leq s$;
- 2.16.2. $\bigcup_{r>0} V(r) = X \times X$;
- 2.16.3. $\bigcap_{r>0} V(r) = \Delta$;
- 2.16.4. existe $\kappa > 0$ tal que $V(r) \circ V(r) \subseteq V(\kappa r)$, para todo $r > 0$;
- 2.16.5. $V(r) = V(r)^{-1}$, para todo $r > 0$.

Dos sistemas de bandas V y W en X se dicen equivalentes si existen constantes $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ tales que

$$V(\gamma_1 r) \subseteq W(r) \subseteq V(\gamma_2 r)$$

para todo $r > 0$. Denotamos esta nueva relación de equivalencia como $V \approx W$. Veremos a continuación que $\approx$ está vinculada con la relación $\sim$ entre cuasi-métricas en X . En efecto, si d es cuasi-métrica en X es fácil ver que la asignación $r \mapsto B_d(r)$ denotada como $V_d(r)$ es un sistema de bandas y que, si $d' \sim d$, entonces $V_{d'} \approx V_d$. Más aún, el hecho que todo sistema de bandas genere a su vez una cuasi-métrica permite obtener un resultado recíproco al anterior.

Proposición 2.17. Sea $V : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$ un sistema de bandas. La función $d_V : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida como

$$d_V(x, y) = \inf\{r > 0 : (x, y) \in V(r)\} \quad (2.5)$$

es una cuasi-métrica en X tal que $K_{d_V} \leq \kappa$ y $V \approx V_{d_V}$. Aquí, κ es la constante que figura en 2.16.4.

Demostración. La buena definición de d_V como función que toma valores reales no negativos se sigue de la propiedad 2.16.2. Dado $x \in X$, 2.16.3 implica que $(x, x) \in V(r)$ para todo $r > 0$, por lo que claramente $d_V(x, x) = 0$. De forma similar, si $d_V(x, y) = 0$, entonces existe una sucesión $r_k \searrow 0$ tal que $(x, y) \in V(r_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero por 2.16.1 esto equivale a afirmar que $(x, y) \in \bigcap_{r>0} V(r) = \Delta$ y, por lo tanto, $x = y$. Usando 2.16.5, podemos deducir la simetría de d_V como sigue.

$$\begin{aligned} d_V(x, y) &= \inf\{r > 0 : (x, y) \in V(r)\} = \inf\{r > 0 : (y, x) \in V(r)^{-1}\} \\ &= \inf\{r > 0 : (y, x) \in V(r)\} \\ &= d_V(y, x). \end{aligned}$$

Para comprobar la desigualdad triangular, consideremos puntos $x, y, z \in X$ y fijemos $\varepsilon > 0$. De la definición de d_V , se sigue que existen números positivos r y s tales que $(x, y) \in V(r)$ y $(y, z) \in V(s)$, al mismo tiempo que $d_V(x, y) + \varepsilon > r$ y $d_V(y, z) + \varepsilon > s$. Entonces

$$(x, z) \in V(s) \circ V(r) \subseteq V(r+s) \circ V(r+s) \subseteq V(\kappa(r+s)),$$

donde la primera inclusión de conjuntos se sigue de 2.16.1 y la segunda de 2.16.4. Pero el hecho que (x, z) esté contenido en $V(\kappa(r+s))$ implica que

$$d_V(x, z) \leq \kappa(r+s) \leq \kappa[d_V(x, y) + d_V(y, z)] + 2\kappa\varepsilon.$$

Tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ deducimos que κ es una constante triangular válida para d_V . Por último, si $0 < \gamma < 1$ y $(x, y) \in V(\gamma r)$, entonces $d_V(x, y) \leq \gamma r < r$, por lo que $(x, y) \in V_{d_V}(r)$. Asimismo, si $(x, y) \in V_{d_V}(r)$, entonces $(x, y) \in V(r)$. En resumidas cuentas, hemos probado que $V(\gamma r) \subseteq V_{d_V} \subseteq V(r)$, para cualquier $\gamma \in (0, 1)$. ■

Lema 2.18. Si V y W son sistemas de bandas equivalentes en X con

$$V(\gamma_1 r) \subseteq W(r) \subseteq V(\gamma_2 r), \text{ para todo } r > 0,$$

entonces $d_V \sim d_W$ con

$$\gamma_1 d_W(x, y) \leq d_V(x, y) \leq \gamma_2 d_W(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

Demostración. Dados $x, y \in X$, notemos que valen las inclusiones

$$\{r > 0 : (x, y) \in W(\gamma_2^{-1}r)\} \subseteq \{r > 0 : (x, y) \in V(r)\} \subseteq \{r > 0 : (x, y) \in W(\gamma_1^{-1}r)\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma_1 d_W(x, y) &= \gamma_1 \inf\{r > 0 : (x, y) \in W(r)\} \\ &= \inf\{r > 0 : (x, y) \in W(\gamma_1^{-1}r)\} \\ &\leq \inf\{r > 0 : (x, y) \in V(r)\} \\ &= d_V(x, y) \\ &= \inf\{r > 0 : (x, y) \in V(r)\} \\ &\leq \inf\{r > 0 : (x, y) \in W(\gamma_2^{-1}r)\} \\ &= \gamma_2 \inf\{r > 0 : (x, y) \in W(r)\} \\ &= \gamma_2 d_W(x, y). \end{aligned}$$

■

Si denotamos por $\mathcal{V}(X)$ a la colección de todos los sistemas de bandas en un conjunto X y consideramos la función $\Phi : \mathcal{D}(X)/\sim \rightarrow \mathcal{V}(X)/\approx$ dada por $\Phi([d]) = [V_d]$, entonces es posible verificar que múltiples caminos del diagrama siguiente conmutan. Esto sigue del hecho que dos sistemas de bandas V y W cumplen $V \approx W \iff d_V \sim d_W$, mientras que dos cuasi-métricas d, d' satisfacen $d \sim d' \iff V_d \approx V_{d'}$. En el diagrama, $\pi_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)/\sim$ y $\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X)/\approx$ denotan las correspondientes proyecciones al cociente.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{V_d} \\ \xleftarrow{d_V} \end{array} & \mathcal{V}(X) \\ \pi_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{V}} \\ \mathcal{D}(X)/\sim & \xleftrightarrow{\Phi} & \mathcal{V}(X)/\approx \end{array}$$

Los últimos resultados muestran la profunda conexión que existe entre cuasi-métricas y sistemas de bandas, lo que será aprovechado en la [Sección 2.6](#) para mejorar las propiedades geométricas de una dada cuasi-métrica a través de finas modificaciones en su sistema de bandas asociado.

2.3 Nociones de dispersión y lemas de cubrimiento en espacios cuasi-métricos

Dado $\varepsilon > 0$, entendemos por conjunto ε -**disperso** en (X, d) a un conjunto de la forma $\{x_i\}_{i \in I}$ con la propiedad que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \forall i, j \in I \text{ con } i \neq j.$$

Diremos que $\{x_i\}_{i \in I}$ es ε -**disperso maximal** en $Y \subseteq X$, si además de lo anterior se cumple que para todo $y \in Y$, existe $i \in I$ tal que $d(y, x_i) < \varepsilon$. Ya se hizo referencia a esta clase de conjuntos en la demostración del [Teorema 1.6](#) en el capítulo previo. La existencia de estos conjuntos es sencilla de demostrar cuando el subconjunto Y es acotado y está definida sobre X una medida con cierta propiedad de duplicación a introducir en la sección siguiente; de hecho, este es el caso del conjunto considerado en la prueba del [Teorema 1.6](#). Más aún, la existencia de dichos conjuntos también puede ser demostrada a través del Lema de Zorn eliminando la hipótesis de acotación de Y .

Definición 2.19. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico.

2.19.1. Diremos que (X, d) posee la **propiedad de homogeneidad débil** (PHD) si existe una constante $N \in \mathbb{N}$ tal que todo conjunto $\frac{r}{2}$ -disperso en $B_d(x, r)$ tiene a lo sumo N elementos; para cualquier $x \in X$ y $r > 0$.

2.19.2. Dado un subconjunto $\Omega \subseteq X$, la **dimensión de Assouad** de Ω es la cantidad

$$\inf\{\alpha > 0 : \exists C > 0 / \#(B_d(x, \lambda r) \cap S) \leq C\lambda^\alpha, \forall x \in X, \lambda > 1, r > 0 \text{ y } S \subseteq Xr\text{-disperso}\}$$

y la denotamos por $\dim_A X$.

Observación: si (X, d) es espacio cuasi-métrico y cumple la PHD, entonces es automáticamente separable. Para ver esto basta tomar $x \in X$ y considerar la familia creciente de bolas $\{B_d(x, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada par $n, m \in \mathbb{N}$, elegimos $S_{n,m} \subseteq B_d(x, n)$ subconjunto m^{-1} -disperso maximal. Luego, $\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} S_{n,m}$ es un subconjunto denso y numerable en X .

La introducción tanto de la PHD y la dimensión de Assouad en una misma definición no es casual, dado que ambos conceptos están intrínsecamente relacionados, como deja ver el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Un espacio cuasi-métrico (X, d) posee la PHD si y solo si $\dim_A X < \infty$. Más aún, si (X, d) cumple la PHD con constante N , entonces $\dim_A X \leq \log_2 N$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que, si $\dim_A X < \alpha_0 < \infty$, entonces existe una constante $C = C(\alpha_0) > 0$ tal que (X, d) satisface la PHD con constante $N \leq C2^{\alpha_0}$. Recíprocamente, supongamos que (X, d) posee la PHD con constante N . Afirmamos que para todo $x \in X$, $r > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, se cumple que todo $\frac{r}{2^k}$ -disperso en $B_d(x, r)$ tiene a lo sumo N^k puntos. El caso $k = 1$ coincide con la definición de la PHD. Supongamos ahora que la afirmación vale para cierto natural k y sea $S \subseteq B_d(x, r)$ un conjunto $\frac{r}{2^{k+1}}$ -disperso, para cierto $x \in X$ y $r > 0$. Tomemos a continuación un nuevo conjunto $T \subseteq B_d(x, r)$ que sea $\frac{r}{2^k}$ -disperso maximal. Luego, $B_d(x, r) \subseteq \bigcup_{y \in T} B_d(y, \frac{r}{2^k})$ y $\#(T) \leq N^k$ gracias a la hipótesis inductiva. Por otro lado, dado que cada conjunto $S_y := S \cap B_d(y, \frac{r}{2^k})$ con $y \in T$ tiene a lo sumo N puntos por la PHD, se sigue que

$$\#(S) \leq \sum_{y \in T} \#(S_y) \leq N \#(T) \leq N^{k+1}.$$

Una vez probada la afirmación, fijemos $x \in X$, $r > 0$ y $\lambda > 1$. Sea S un conjunto r -disperso en X y sea k el entero definido por las relaciones $2^{k-1} < \lambda \leq 2^k$. Entonces,

$$\#(B_d(x, \lambda r) \cap S) \leq \#(B_d(x, 2^k r) \cap S) \leq N^k \leq N^k \leq N \lambda^{\log_2 N},$$

de lo que se deduce $\dim_A X \leq \log_2 N$. ■

La hipótesis de PHD o, alternativamente, de finitud de la dimensión de Assouad sobre el espacio (X, d) permite la extensión de algunos lemas de cubrimiento clásicos que derivan del análisis armónico en espacios euclídeos: las siguientes son adaptaciones de los lemas de cubrimiento usualmente atribuidos a Wiener y Whitney, cuyas demostraciones pueden consultarse en [Aim13; Com22].

Lema 2.21 (Lema de Wiener). *Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico con dimensión de Assouad finita y sea $R : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, donde $E \subseteq X$ es acotado. Entonces, existen un subconjunto $\{x_i\}_{i \in J} \subseteq E$ a lo sumo numerable y una constante $C = C(K_d) > 0$ tales que*

$$2.21.1. \quad B_d(x_i, r_i) \cap B_d(x_j, r_j) = \emptyset, \text{ para todo } i, j \in J \text{ con } r_i := R(x_i);$$

$$2.21.2. \quad E \subseteq \bigcup_{i \in J} B_d(x_i, Cr_i).$$

Lema 2.22 (Lema de Whitney). *Sea Ω un subconjunto abierto, propio y acotado de X , siendo (X, d) un espacio cuasi-métrico con dimensión de Assouad finita, y supongamos además que $K > 0$ es una constante triangular para d . Entonces, existe una familia de d -bolas $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i \in J}$, indexada por un conjunto numerable J , tal que:*

$$2.22.1. \quad B_d(x_i, r_i) \cap B_d(x_j, r_j) = \emptyset, \text{ siempre que } i \neq j;$$

$$2.22.2. \Omega = \bigcup_{i \in J} B_d(x_i, 3Kr_i);$$

$$2.22.3. 3Kr_i \leq d(x, X \setminus \Omega) \leq 9K^3r_i, \text{ para todo } x \in B_d(x_i, 3Kr_i) \text{ y todo } i \in J;$$

$$2.22.4. \text{ Para cada } i \in J, \text{ existe algún } y_i \in X \setminus \Omega \text{ tal que } d(x_i, y_i) < 9K^2r_i.$$

2.4 Espacios de tipo homogéneo

Cuando al espacio cuasi-métrico (X, d) se le incorpora una medida *duplicante*, se obtiene un espacio con una geometría particularmente rica y con una estructura compleja. Esto es debido a que, como veremos en esta sección, la propiedad de duplicación de la medida sobre las d -bolas impone automáticamente una restricción sobre la forma en que los puntos del conjunto X se hallan dispersos en el espacio; condición que puede cuantificarse a partir de la PHD o la dimensión de Assouad introducidas en la sección anterior.

Definición 2.23. Un **espacio de tipo homogéneo** es una terna (X, d, μ) donde X es un conjunto cualquiera, d es una cuasi-métrica en X y μ es una medida no negativa definida en una σ -álgebra $\mathcal{F}_\mu$ de partes de X tal que $\{B_d(x, r)\}_{x \in X, r > 0} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ y donde μ es duplicante: esto es, existe una constante $c_{\mu, d} > 0$ tal que

$$0 < \mu(B_d(x, 2r)) \leq c_{\mu, d} \mu(B_d(x, r)) < \infty, \quad (2.6)$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

Observación: aplicando el Lema 2.22, se observa inmediatamente que todo abierto propio A en un ETH (X, d, μ) puede escribirse como unión numerables de bolas. Esto implica que $A \in \mathcal{F}_\mu$ y, por lo tanto, que μ es una medida de Borel en (X, d, μ) .

Ejemplo 2.24. $(\mathbb{R}^n, |x - y|, \mu)$ donde $|x - y|$ denota la distancia usual entre los puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y m es la medida de Lebesgue es un espacio de tipo homogéneo n -Ahlfors regular dado que $m(B_d(x, 2r)) = 2^n m(B_d(x, r))$.

Ejemplo 2.25. Sea A una matriz diagonal de $n \times n$ entradas reales, con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ todos mayores o iguales a uno. Las dilataciones naturales asociadas a A están dadas por las funciones $\delta_s(x) = e^{A \log s} x$, con $s > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. En este contexto, la asignación

$$d_A(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|^{\frac{1}{\lambda_1}}, \dots, |x_n - y_n|^{\frac{1}{\lambda_n}}\}$$

satisface $d_A(\delta_s(x), \delta_s(y)) = s d_A(x, y)$ para todo $s > 0$ (ver [Guz81]). Más aún, la función d_A define una métrica en $\mathbb{R}^n$ y $B_{d_A}(x, r) = \prod_{i=1}^n (x_i - r^{\lambda_i}, x_i + r^{\lambda_i})$. Su medida de Lebesgue es

$$m(B_{d_A}(x, r)) = \prod_{i=1}^n 2r^{\lambda_i} = 2^n r^\tau,$$

donde $\tau = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ es la traza A . Por consiguiente, $(\mathbb{R}^n, d_A, m)$ es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación 2^τ .

Ejemplo 2.26. Los ejemplos anteriores tienen tanto métricas como medidas invariantes por traslaciones. Ejemplos de espacios de tipo homogéneo con medidas no invariantes por traslaciones son provistas por pesos duplicantes y, en particular, pesos de Muckenhoupt. Así,

$(\mathbb{R}^n, |x - y|, w(x)dx)$ es un espacio de tipo homogéneo si $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{p>1} A_p(\mathbb{R}^n)$. También lo es $(\mathbb{R}^n, d_w, w(x)dx)$ con

$$d_w(x, y) := \int_{B(\frac{x+y}{2}, \frac{|x-y|}{2})} w(z)dz,$$

donde el dominio de la integral es una bola euclídea.

Ejemplo 2.27. Los fractales autosimilares con las medidas de Hausdorff correspondientes son espacios Ahlfors regulares y por lo tanto, espacios de tipo homogéneo. Ver [Mos95; Mos97].

Ejemplo 2.28. Estructuras de ETH en el espacio tiempo asociado a la regularidad Hölder de difusiones pueden encontrarse en [Aim03].

Teorema 2.29. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo.

2.29.1. (X, d) cumple la PHD.

2.29.2. (X, d) es separable.

Demostración. Para ver que (X, d) cumple la PHD, consideremos una bola $B_d(x, r)$ con cierto centro $x \in X$ y determinado radio $r > 0$. Si $S \subseteq B_d(x, r)$ es un conjunto $\frac{r}{2}$ -disperso, entonces

$$B_d(y, \frac{r}{4K_d}) \cap B_d(y', \frac{r}{4K_d}) = \emptyset, \text{ para todo } y, y' \in S.$$

Además, si $z \in B_d(y, \frac{r}{4K_d})$ con $y \in S$ entonces $d(z, x) \leq K_d[d(z, y) + d(y, x)] \leq \frac{4}{5}K_dr < 2K_dr$, y si $w \in B_d(x, r)$ se sigue que $d(w, y) \leq K_d[d(w, x) + d(x, y)] < 2K_dr$. Las desigualdades anteriores muestran que $B_d(y, \frac{r}{4K_d}) \subseteq B_d(x, 2K_dr)$ y $B_d(x, r) \subseteq B_d(y, 2K_dr)$ para todo $y \in S$. Luego, para todo subconjunto finito $S_0 \subseteq S$ se tiene que

$$\#(S_0) \min_{y \in S_0} \mu(B_d(y, \frac{r}{4K_d})) \leq \sum_{y \in S_0} \mu(B_d(y, \frac{r}{4K_d})) = \mu\left(\bigcup_{y \in S_0} B_d(y, \frac{r}{4K_d})\right) \leq \mu(B_d(x, 2K_dr)).$$

En consiguiente, si $y_0 := \arg \min_{y \in S_0} \mu(B_d(y, \frac{r}{4K_d}))$, tenemos que

$$\#(S_0) \leq \frac{\mu(B_d(x, 2K_dr))}{\mu(B_d(y_0, \frac{r}{4K_d}))} \leq c_{\mu, d}^{m+k} \frac{\mu(B_d(x, r))}{\mu(B_d(y_0, 2K_dr))} \leq c_{\mu, d}^{m+k},$$

donde los enteros m y k quedan definidos por las relaciones $2^{m-1} < 2K_d \leq 2^m$ y $2^{k-2} < K_d^2 \leq 2^{k-3}$. Dado que todo subconjunto finito de S tiene a lo sumo $\lfloor c_{\mu, d}^{m+k} \rfloor$ elementos, se sigue que S tiene cardinalidad finita y acotada por esta misma cantidad. Por otro lado, el hecho que (X, d) es separable se sigue de 2.29.1 y de la observación posterior a la Definición 2.19. ■

Si (X, d, μ) es un ETH y $d \sim_{C_1, C_2} d'$ para cierta $d' \in \mathcal{D}(X)$, puede ocurrir que las d' -bolas no sean siquiera μ -medibles, y por lo tanto la terna (X, d', μ) no necesariamente es un ETH. Sin embargo, si d' es tal que las d' -bolas son conjuntos abiertos, entonces el hecho que μ es una medida de Borel implica que $\{B_{d'}(x, r)\}_{x \in X, r>0} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ y, más aún, se puede hallar una constante de duplicación $c_{\mu, d'} = c_{\mu, d'}(c_{\mu, d}, C_1, C_2)$ para esta nueva cuasi-métrica, por lo que en este caso sí es posible afirmar que (X, d', μ) es un ETH.

A continuación, procedemos a demostrar algunas propiedades básicas de los espacios de tipo homogéneo, algunas de las cuales involucran a sus **átomos**. Entendemos por átomo a un punto $x \in X$ tal que $\mu(\{x\}) > 0$ y denotamos por

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$$

a la colección de todos los átomos en X .

Teorema 2.30. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo.*

2.30.1. *X es acotado si y solo si $\mu(X) < \infty$.*

2.30.2. *La colección $\mathcal{A}$ es a lo sumo numerable.*

2.30.3. *Un punto $x_0 \in X$ es un átomo si y solo si x_0 es aislado.*

Demostración. Si X es acotado entonces $X \subseteq B_d(x, R)$, para cierto $x \in X$ y $R > 0$. Luego, $\mu(X) \leq \mu(B_d(x, R)) < \infty$ por (2.6). Supongamos ahora que $\mu(X) < \infty$ y, sin embargo, X es no acotado. Fijo $x \in X$, consideramos la sucesión de bolas $\{B_d(x, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dado que X es no acotado, podemos hallar una sucesión de números $n_1 < n_2 < \dots$ y puntos $x_{n_j} \in B_d(x, 4n_j) \setminus B_d(x, 2n_j)$. Ahora bien, si $y \in B_d(x_{n_j}, K_d^{-1}n_j)$, la desigualdad triangular implica que $d(y, x) \geq K_d^{-1}(d(x, x_{n_j}) - K_d d(y, x_{n_j})) \geq K_d^{-1}n_j$, mientras que si $z \in B_d(x, n_j)$, entonces $d(z, x_{n_j}) \leq K_d[d(z, x) + d(x, x_{n_j})] \leq 5K_d n_j$. A partir de estas desigualdades, se sigue que $B_d(x_{n_j}, K_d^{-1}n_j) \cap B_d(x, K_d^{-1}n_j) = \emptyset$ y $B_d(x, n_j) \subseteq B_d(x_{n_j}, 5K_d n_j)$. Luego, notando que la hipótesis $\mu(X) < \infty$ implica $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X \setminus B_d(x, K_d^{-1}n_j)) = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 < \mu(X) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(B_d(x, n_j)) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(B_d(x_{n_j}, 5K_d n_j)) \\ &\leq c_{\mu, d}^m \limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(B_d(x_{n_j}, K_d^{-1}n_j)) \\ &\leq c_{\mu, d}^m \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X \setminus B_d(x, K_d^{-1}n_j)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $2^{m-1} < 5K_d^2 \leq 2^m$, lo cual es una contradicción que vino de suponer que X es no acotado.

Para probar 2.30.2, basta con tomar $x_0 \in X$ fijo, definir $\mathcal{A}_{n, m} = \{x \in B_d(x_0, m) : \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$ y notar que $\mathcal{A} = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{n, m}$; siendo que cada $\mathcal{A}_{n, m}$ tiene cardinalidad finita debido a que $\mu(B_d(x_0, m)) < \infty$ para todo m natural.

Finalmente, consideramos 2.30.3. Notemos que si $x_0 \in X$ es aislado, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B_d(x_0, r_0) = \{x_0\}$ y, por 2.6, $\mu(\{x_0\}) > 0$. Supongamos ahora que x_0 es un átomo y, sin embargo, no es un punto aislado. Se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir un punto $x_n \in B_d(x_0, \frac{1}{n}) \setminus \{x_0\}$. Observemos además que, denotando $\mu_0 := \mu(\{x_0\})$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_d(x_0, \frac{1}{n})) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_d(x_0, \frac{1}{n})\right) = \mu_0.$$

En particular, $\mu(B_d(x_0, \frac{1}{n}r) \setminus \{x_0\}) \searrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, sin importar el valor de $r > 0$. Ahora, escribiendo $d_n := d(x_n, x_0)$, se sigue que $d_n \in (0, \frac{1}{n})$ y $x_0 \in B_d(x_n, 2d_n)$, mientras que $x_0 \notin B_d(x_n, d_n) \subseteq B_d(x_0, 2K_d n^{-1}) \setminus \{x_0\}$. Luego,

$$0 < \mu_0 \leq \mu(B_d(x_n, 2d_n)) \leq c_{\mu, d} \mu(B_d(x_n, d_n)) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, x_0 es aislado. ■

En el contexto de los espacios euclídeos, muchas técnicas de estudio en el área del análisis yacen en descomposiciones de dominios en bolas y cubos, donde el problema original puede resolverse localmente debido a que dichos subconjuntos poseen, en algún sentido, la misma geometría que el espacio original. Si (X, d, μ) es un ETH y llamamos *constantes geométricas* a las constantes triangular K_d y de duplicación de la medida $c_{\mu,d}$, entonces no todo subconjunto de $Y \subseteq X$ forma un ETH al considerarse las restricciones de d y μ sobre este; y aún si lo fuera, no es posible determinar *a priori* el valor de las nuevas constantes geométricas. Para permitir el uso de técnicas de localización como las usuales en $\mathbb{R}^n$ sobre cubos o bolas, es necesario hallar una familia de subconjuntos de X que mantengan la geometría del espacio según el siguiente criterio. Diremos que una familia $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **familia uniforme de subespacios de tipo homogéneo** de X si $(Y_i, d_{Y_i}, \mu_{Y_i})$ es un ETH con constantes geométricas $\tilde{K}$ y $\tilde{c}$ independientes de $i \in I$, donde d_{Y_i} y μ_{Y_i} son las restricciones de d y μ en Y_i , respectivamente. El siguiente resultado, esquematizado en la Figura 2.3, provee una condición suficiente para garantizar que las d -bolas son una familia uniforme de subespacios de tipo homogéneo.

Teorema 2.31. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con la siguiente propiedad. Existe una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que para todo $x \in X$, $r > 0$, $0 < s \leq 2K_d r$ y $y \in B_d(x, r)$, es posible hallar $z \in X$ que cumple*

$$B_d(z, \beta s) \subseteq B_d(x, r) \cap B_d(y, s). \quad (2.7)$$

Entonces, $\{B_d(x, r)\}_{x \in X, r > 0}$ es una familia uniforme de subespacios de tipo homogéneo en (X, d, μ) .

Demostración. Fijos $x \in X$ y $r > 0$, escribimos $B_* = B_d(x, r)$ y denotamos por d_* y μ_* a las restricciones sobre B_* de d y μ , respectivamente. Veamos que (B_*, d_*, μ_*) es un espacio de tipo homogéneo que admite a K_d como constante triangular y a una potencia apropiada (e independiente de x y r) de $c_{\mu,d}$ como constante de duplicación para la medida μ_* . Sabemos que el par (B_*, d_*) es un espacio cuasi-métrico con $K_{d_*} \leq K_d$, por lo que basta comprobar que μ_* cumple con los requerimientos de la Definición 2.23. Claramente, μ_* es una medida no negativa definida sobre la σ -álgebra

$$\mathcal{F}_{\mu_*} = \{Y \cap B_* : Y \in \mathcal{F}_{\mu}\}$$

que satisface $\{B_{d_*}(y, s)\}_{y \in B_*, s > 0} \subseteq \mathcal{F}_{\mu_*}$. Dados $y \in B_*$ y $s > 0$, se sigue inmediatamente que $\mu_*(B_{d_*}(y, s)) \leq \mu(B_*) < \infty$. Además, la hipótesis implica la existencia de cierto $z \in B_{d_*}(y, s)$ tal que

$$B_d(z, \beta s) \subseteq B_d(x, r) \cap B_d(y, s) = B_{d_*}(y, s).$$

En particular, $\mu(B_{d_*}(y, s)) \geq \mu(B_d(z, \beta s)) > 0$ y, dado que $B_d(y, 2s) \subseteq B_d(z, 3K_d s)$, concluimos

$$\mu_*(B_{d_*}(y, 2s)) \leq \mu(B_d(y, 2s)) \leq \mu(B_d(z, 3K_d s)) \leq c_{\mu,d}^m \mu(B_d(z, \beta s)) \leq c_{\mu,d}^m \mu_*(B_{d_*}(y, s)),$$

donde $2^{m-1} < 3K_d \beta^{-1} \leq 2^m$. ■

Definición 2.32. Un dado espacio cuasi-métrico (X, d) munido de una medida de Borel μ tal que las d -bolas son medibles se denomina **espacio γ -Ahlfors** o **γ -Ahlfors regular** con $\gamma > 0$ si existen constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que

$$c_1 r^\gamma \leq \mu(B_d(x, r)) \leq c_2 r^\gamma, \quad (2.8)$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$.

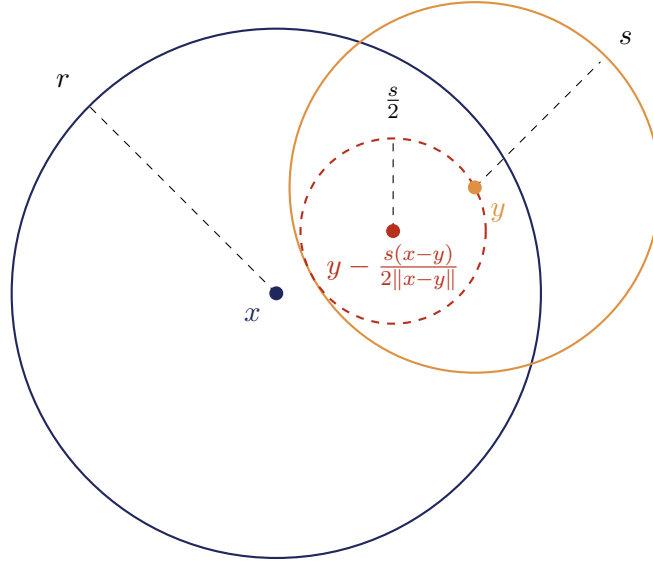


Figura 2.3: La condición (2.7) que figura en el Teorema 2.31 se cumple de forma trivial en $\mathbb{R}^n$: basta con tomar $\beta = \frac{1}{2}$ y $z = y - \frac{s(x-y)}{2\|x-y\|}$.

Notemos que si (X, d, μ) es γ -Ahlfors para algún $\gamma > 0$ entonces es un ETH. En el caso particular $\gamma = 1$, decimos que (X, d, μ) es un **espacio normal**. Los espacios γ -Ahlfors presentan claras ventajas a la hora de realizar estimaciones debido a la posibilidad de cuantificar o aproximar la medida de las d -bolas. En [MS79], los autores muestran que siempre es posible obtener una cuasi-métrica equivalente a la original tal que el nuevo espacio obtenido es normal. Presentaremos a continuación una condición en cierto sentido más débil que la de Ahlfors y que será muy útil en capítulos próximos para hallar ejemplos de interés.

Definición 2.33. Un espacio cuasi-métrico (X, d) se denomina **uniformemente perfecto** si existe una constante $0 < \eta < 1$ tal que para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, se cumple

$$B_d(x, r) \setminus B_d(x, \eta r) \neq \emptyset. \quad (2.9)$$

Proposición 2.34. Sea (X, d, μ) un ETH. Las siguientes condiciones son equivalentes.

2.34.1. (X, d) es uniformemente perfecto;

2.34.2. existen constantes $C < 1 < \xi$ tales que

$$\mu(B_d(x, r)) \leq C\mu(B_d(x, \xi r)), \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } r > 0. \quad (2.10)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que (X, d) es uniformemente perfecto con constante η . Más aún, podemos asumir sin pérdida de la generalidad que $0 < \eta < (2K_d)^{-1}$. Dado $x \in X$ y $r > 0$, elegimos $y \in B_d(x, \eta^{-2}r) \setminus B_d(x, \eta^{-1}r)$. Se sigue de aplicar la desigualdad triangular que $B_d(x, r) \cap B_d(y, r) = \emptyset$, $B_d(x, r) \subseteq B_d(y, \eta^{-3}r)$ y $B_d(y, r) \subseteq B_d(x, \eta^{-3}r)$. Luego,

$$\mu(B_d(x, r)) + \mu(B_d(y, r)) \leq \mu(B_d(x, \eta^{-3}r))$$

y

$$\mu(B_d(x, r)) \leq \mu(B_d(y, \eta^{-3}r)) \leq c_{\mu, d}^m \mu(B_d(y, r)),$$

donde el entero m está definido por las relaciones $2^{m-1} < \eta^{-3} \leq 2^m$ y, por lo tanto,

$$\mu(B_d(x, r)) \leq \frac{1}{1 + c_{\mu, d}^{-m}} \mu(B_d(x, \eta^{-3}r)),$$

que es la desigualdad (2.10) con $C = (1 + c_{\mu, d}^{-m})^{-1}$ y $\xi = \eta^{-3}$.

Recíprocamente, si $C < 1 < \xi$ son tales que se cumple (2.10), en particular

$$\mu(B_d(x, \xi r) \setminus B_d(x, r)) > 0.$$

Esto implica que $B_d(x, \xi r) \setminus B_d(x, r) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y $r > 0$, por lo que basta con tomar $\eta = \xi^{-1}$. ■

En la literatura, es común que se haga referencia a 2.34.2 como la condición de duplicación inversa o *reverse doubling* (comparar con (2.6)). Lo llamativo de esto es que (2.10) depende de la medida μ , mientras que la condición de ser uniformemente perfecto no requiere más que el carácter cuasi-métrico del espacio. Este es otro ejemplo donde la propiedad de duplicación de la medida del espacio influye en la dispersión de sus puntos. Si (X, d, μ) es γ -Ahlfors, en particular satisface (2.10) para $\xi > 1$ suficientemente grande, por lo que en este sentido es una propiedad más fuerte que 2.34.1. De hecho, Ahlfors es estrictamente más fuerte que 2.34.1.

Ejemplo 2.35 (ETH uniformemente perfecto pero no Ahlfors). Consideremos la terna $(\mathbb{R}, d, \mu)$, donde d es la distancia usual en $\mathbb{R}$ y $\mu := |x|^\theta dx$ con $\theta > -1$, $\theta \neq 0$. Observemos que $(\mathbb{R}, d)$ es trivialmente uniformemente perfecto. Por otro lado, en la Sección 3.3 veremos que $|x|^\theta \in A_p(\mathbb{R})$ para todo $p > \theta + 1$. Más aún, en el Ejemplo 2.26 se mencionó que todo peso en $A_p(\mathbb{R})$ es duplicante, consecuentemente $(\mathbb{R}, d, \mu)$ es un espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, para $t > 1$ tenemos que

$$\mu(B_d(t, 2)) = \int_{t-1}^{t+1} |x|^\theta dx = \left(\frac{x^{\theta+1}}{\theta} \right) \Big|_{t-1}^{t+1} = \frac{1}{\theta} ((t+1)^{\theta+1} - (t-1)^{\theta+1}).$$

Luego, si $\theta \in (-1, 0)$ se tiene $\mu(B_d(t, 2)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ mientras que si $\theta > 0$, se cumple $\mu(B_d(t, 2)) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En ninguno de los dos escenarios puede ocurrir (2.8) para ningún valor de $\gamma > 0$, por lo que $(\mathbb{R}, d, \mu)$ no es γ -Ahlfors para ningún $\gamma > 0$.

Dado un ETH (X, d, μ) , en el futuro cometeremos un abuso de notación al decir que (X, d, μ) es uniformemente perfecto para referirnos a que es, técnicamente, el espacio cuasi-métrico (X, d) el que posee esta propiedad. Es fácil verificar que si (X, d, μ) es uniformemente perfecto entonces no posee ningún átomo, y por lo tanto esta propiedad es compartida con los espacios de Ahlfors. En efecto, si $x \in X$ es un átomo, por 2.30.3, se sigue que existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $B_d(x, r) \cap X = \{x\}$. Sin embargo, por hipótesis tenemos que $B_d(x, r) \setminus B_d(x, \eta r) \neq \emptyset$, lo cual contradice lo anterior.

2.5 Dimensiones de Hausdorff y Minkowski

En esta breve sección, introducimos rápidamente otras formas conocidas de asignar dimensiones a determinados subconjuntos de espacios cuasi-métricos además de la propia de Assouad, a saber: las dimensiones de Hausdorff y Minkowski. Repasamos también algunas de sus propiedades básicas para futuras menciones.

Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. Dado $E \subseteq X$, así como números $s, \delta > 0$, introducimos la función de conjuntos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diám}_d(A_i)^s : E \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \wedge \text{diám}_d(A_i) \leq \delta \right\}, \quad (2.11)$$

donde $\text{diám}_d(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y)$ es el diámetro del conjunto A con respecto a d . La **s -medida exterior de Hausdorff** queda entonces determinada por la expresión

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

El siguiente lema caracteriza los posibles comportamientos de la asignación $s \mapsto \mathcal{H}^s(E)$ y es crucial a la hora de definir la dimensión de Hausdorff.

Lema 2.36. *Sean (X, d) un espacio cuasi-métrico, E un subconjunto de X y consideremos la función $\Phi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ dada por $\Phi(s) := \mathcal{H}^s(E)$. Entonces, existen tres escenarios posibles:*

2.36.1. $\Phi \equiv 0$;

2.36.2. $\Phi \equiv \infty$;

2.36.3. existe $s_0 > 0$ tal que $\Phi(s) = \infty$ para $s < s_0$ y $\Phi(s) = 0$ para $s > s_0$.

Definición 2.37. Dados (X, d) y E como en el lema anterior, definimos la **dimensión de Hausdorff** de E (con respecto a d) como

$$\dim_{H,d} E := \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}.$$

La dimensión de Hausdorff involucra cubrir al conjunto en cuestión con subconjuntos de X con diámetros más pequeños que una cierta constante δ , para luego tomar el límite cuando dicha constante tiende a cero. En el caso de las dimensiones de Minkowski (también llamadas dimensiones *box*), los cubrimientos son ligeramente diferentes al requerir que consten de una familia de d -bolas con radios exactamente iguales a δ .

Definición 2.38. Si (X, d) es un espacio cuasi-métrico y $E \subseteq X$ es un subconjunto acotado, definimos las **dimensiones superior e inferior de Minkowski** de E , denotándolas (respectivamente) $\overline{\dim}_{M,d}(E)$ y $\underline{\dim}_{M,d}(E)$, como

$$\overline{\dim}_{M,d} E := \inf\{s > 0 : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} N(E, \varepsilon) \varepsilon^s = 0\}$$

y

$$\underline{\dim}_{M,d} E := \inf\{s > 0 : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} N(E, \varepsilon) \varepsilon^s = 0\}$$

donde $N(E, \varepsilon) := \min\{k \in \mathbb{N}_0 : E \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \varepsilon), x_i \in X\}$.

En el caso particular de un espacio de tipo homogéneo que cumple (2.8), las dimensiones de Minkowski pueden calcularse en términos de la medida de los ε -entornos asociados al conjunto en cuestión.

Proposición 2.39. *Sea (X, d, μ) un ETH γ -Ahlfors y $A \subseteq X$ un subconjunto acotado. Entonces,*

$$\overline{\dim}_{M,d} A = \inf\{s > 0 : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(A(\varepsilon)) \varepsilon^{s-\gamma} = 0\} \quad (2.12)$$

y, análogamente,

$$\underline{\dim}_{M,d} A = \inf\{s > 0 : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(A(\varepsilon)) \varepsilon^{s-\gamma} = 0\}. \quad (2.13)$$

Demostración. Notemos que ambas igualdades se siguen si demostramos que

$$N(A, \varepsilon)\varepsilon^\gamma \lesssim \mu(A(\varepsilon)) \lesssim N(A, \varepsilon)\varepsilon^\gamma.$$

Con el fin de verificar la primera desigualdad, supongamos que $\{x_1, \dots, x_k\}$ es un conjunto ε -disperso maximal en A . Dado que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \varepsilon)$, tenemos $k \geq N(A, \varepsilon)$. Además, la familia $\{B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2K_d})\}_{i=1}^k$ es disjunta de a pares y $\bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2K_d}) \subseteq A(\varepsilon)$. Luego,

$$C(K_d, c_1, \gamma)k\varepsilon^\gamma \leq \sum_{i=1}^k \mu(B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{2K_d})) \leq \mu(A(\varepsilon)),$$

lo que implica $N(A, \varepsilon)\varepsilon^\gamma \lesssim \mu(A(\varepsilon))$. Por otro lado, si $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$ es ahora una colección de puntos de X tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, \varepsilon)$, entonces $A(\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, 2K_d\varepsilon)$ y la desigualdad restante se deduce al usar la condición γ -Ahlfors de (X, d, μ) como antes, notando que lo anterior vale para todo $k \geq N(A, \varepsilon)$. ■

Teorema 2.40. *Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico.*

2.40.1. *Si $d, d' \in \mathcal{D}(X)$ son equivalentes, entonces*

$$\dim_{H,d}(E) = \dim_{H,d'}(E)$$

para todo $E \subseteq X$. Si además E es acotado, se cumple

$$\dim_{M,d}(E) = \dim_{M,d'}(E).$$

2.40.2. *Si $A \subseteq X$ es acotado, $\dim_{H,d} A \leq \underline{\dim}_{M,d} A \leq \overline{\dim}_{M,d} A$.*

2.6 La cuasi-métrica de Macías y Segovia

Esta sección está dedicada a una construcción dada a conocer en el trabajo [MS79] y, como se adelantó previamente, consiste en una cuasi-métrica con propiedades geométricas especiales y que mantiene su equivalencia con la cuasi-métrica original del espacio de tipo homogéneo de partida. Esta cuasi-métrica junto con los lemas de cubrimiento introducidos en la Sección 2.3 forman una poderosa herramienta de localización que será esencial para los resultados a discutir en el Capítulo 4. Más precisamente, para la resolución de un problema análogo al Problema 1.1 pero en el contexto de los espacios de tipo homogéneo.

La idea de los autores consistió en aplicar un proceso iterativo de mejora o suavizado del sistema de bandas V_d asociado a la cuasi-métrica inicial d , para así obtener un nuevo sistema de bandas U . Luego, la nueva cuasi-métrica se obtiene simplemente como la aplicación d_U asociada a este sistema, tal y como fue discutido en detalle en la última parte de la Sección 2.2.

Lema 2.41. *Sean (X, d) un espacio cuasi-métrico, $V_d : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$ el sistema de bandas inducido por d y $\xi = (4K_d)^{-1}$. Para cada $r > 0$ y cada entero no negativo n , definimos recursivamente*

$$u(r, n) := \begin{cases} V_d(r), & \text{si } n = 0 \\ V_d(\xi^n r) \circ u(r, n-1) \circ V_d(\xi^n r), & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$r \mapsto U(r) = \bigcup_{n=0}^{\infty} u(r, n)$$

es un sistema de bandas en X tal que

$$V_d(r) \subseteq U(r) \subseteq V_d(2K_d^2 r), \quad \text{para todo } r > 0.$$

Demostración. Dado $r > 0$, por definición de la aplicación $r \mapsto U(r)$ tenemos $V_d(r) = u(r, 0) \subseteq U(r)$. Para demostrar la inclusión restante, supongamos que $(x, y) \in U(r)$ y veamos que $d(x, y) \leq 2K_d^2 r$. Nuevamente por definición de U , tenemos que $(x, y) \in u(r, n)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Por el [Lema 2.3](#) y la observación que lo sucede, se sigue que existe una cadena $(x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_0)$ tal que $x_0 = x$, $y_0 = y$ y

$$\begin{cases} (x_i, x_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i} r), & 0 \leq i < n \\ (y_i, y_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i} r), & 0 \leq i < n \\ (x_n, y_n) \in V_d(r). \end{cases} \quad (2.14)$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq K_d[d(x, y_n) + d(y_n, y)] \leq K_d[K_d[d(x, x_n) + d(x_n, y_n)] + d(y_n, y)] \\ &\leq K_d^2 r + K_d^2[d(x, x_n) + d(y_n, y)]. \end{aligned}$$

Pero aplicando reiteradas veces la desigualdad triangular en d , vemos que

$$\begin{aligned} d(x, x_n) &\leq K_d[d(x, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)] \\ &\leq K_d d(x_{n-1}, x_n) + K_d^2[d(x, x_{n-2}) + d(x_{n-2}, x_{n-1})] \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} K_d^{n-i} d(x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Efectuando un procedimiento análogo sobre el término $d(y_n, y)$, concluimos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq K_d^2 r + K_d^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} K_d^{n-i} d(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} K_d^{n-i} d(y_i, y_{i+1}) \right) \\ &\leq K_d^2 r + 2K_d^2 \sum_{i=0}^{n-1} 4^{i-n} r \\ &\leq K_d^2 r \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} 4^{-i} \right) \\ &\leq 2K_d^2 r, \end{aligned}$$

como debía ser demostrado. ■

Observación: el parámetro ξ que dicta el proceso de suavizado de $U(r)$ puede elegirse libremente en el intervalo $(0, \frac{1}{2K_d})$. Esto es de hecho lo que hacen los autores en [\[MS79\]](#), aunque aquí lo hemos prefijado al valor indicado para simplificar la exposición.

Definición 2.42. Dado un espacio cuasi-métrico (X, d) , denominamos **cuasi-métrica de Macías y Segovia** de (X, d) a la cuasi-métrica

$$\delta(x, y) := d_U(x, y) = \inf\{r > 0 : (x, y) \in U(r)\},$$

siendo d_U la cuasi-métrica asociada al sistema de bandas $U : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(X \times X)$ introducido en el Lema 2.41.

Corolario 2.43. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. La cuasi-métrica δ es equivalente a d . En efecto,

$$\delta(x, y) \leq d(x, y) \leq 2K_d^2 \delta(x, y),$$

para todo $x, y \in X$. En particular, $K_\delta \leq 2K_d^3$.

Demostración. Se sigue inmediatamente de los Lemas 2.18 y 2.41 usando que $d = d_{V_d}$. ■

El resultado previo afirma que $\delta \sim_{1, 2K_d^2} d$, por lo que (2.2) toma la forma

$$B_d(x, r) \subseteq B_\delta(x, r) \subseteq B_d(x, 2K_d^2 r). \quad (2.15)$$

En el próximo resultado usamos esta comparación para caracterizar con mayor detalle a las δ -bolas.

Lema 2.44. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. Entonces,

$$B_\delta(x, r) = (U(r))(x),$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$. Si además las d -bolas forman una base de τ_d , entonces las δ -bolas conservan esta propiedad. En otras palabras, las δ -bolas son conjuntos abiertos.

Demostración. Considerando que $\delta(x, y) = \inf\{s > 0 : (x, y) \in U(s)\}$, si $y \in B_\delta(x, r)$, entonces $\delta(x, y) < r$ y, consecuentemente, $(x, y) \in U(r)$, por lo tanto $y \in (U(r))(x)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in U(r)$, entonces $(x, y) \in u(r, n)$ para cierto n y existe una cadena $(x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_0)$ tal que $x_0 = x$, $y_0 = y$ y se cumple (2.14). Pero es claro que $(x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_0)$ también cumple (2.14) reemplazando r por cierto $s < r$, lo que implica que $(x, y) \in u(s, n) \subseteq U(s)$. Luego, $\delta(x, y) \leq s < r$, esto es, $y \in B_\delta(x, r)$.

Supongamos ahora que las d -bolas son conjuntos abiertos en la topología inducida por d . Dados $x \in X$ y $r > 0$, observemos que

$$(U(r))(x) = \{y \in X : (x, y) \in U(r)\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{y \in X : (x, y) \in u(r, n)\}.$$

Pero si definimos $W_n := u(r, n-1) \circ V_d(\xi^n r)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \{y \in X : (x, y) \in u(r, n)\} &= \{y \in X : (x, y) \in V_d(\xi^n r) \circ W_n\} \\ &= \{y \in X : \exists v \in X \text{ tal que } (x, v) \in W_n \wedge (v, y) \in V_d(\xi^n r)\} \\ &= \bigcup_{v \in W_n(x)} B_d(v, \xi^n r), \end{aligned}$$

que es abierto en (X, d) por ser unión de d -bolas. Más aún, como $(U(r))(x) = B_\delta(x, r)$ es unión de estos conjuntos, se sigue que las δ -bolas también son abiertas. ■

El siguiente teorema da a conocer una propiedad geométrica adicional de las bolas de la cuasi-métrica de Macías y Segovia. Ésta consiste en la posibilidad de hallar una δ -bola con radio comparable en la intersección de dos δ -bolas iniciales; que en particular implica que si se parte de un ETH (X, d, μ) , entonces las δ -bolas son en sí mismas espacios de tipo homogéneos que admiten las mismas constantes geométricas, según lo visto en el Teorema 2.31.

Teorema 2.45. *Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico tal que las d -bolas forman una base de τ_d y sea δ la cuasi-métrica de Macías y Segovia de (X, d) . Entonces, existe una constante $0 < \beta = \beta(K_d) < 1$ tal que para todo $x \in X$, $r > 0$, $0 < s \leq 2K_d r$ y $y \in B_\delta(x, r)$, es posible hallar $z \in X$ que satisface*

$$B_\delta(z, \beta s) \subseteq B_\delta(y, s) \cap B_\delta(x, r). \quad (2.16)$$

Demostración. Sean m y l los enteros definidos por las relaciones

$$\begin{cases} \xi^{m+1}r < s \leq \xi^m r \\ l = m + 3, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $\xi = (4K_d)^{-1}$ es la constante utilizada en la definición del sistema de bandas U introducido en el Lema 2.41. Dado que $s \leq 2K_d r$, tenemos que

$$\xi^{m+1}r < s \leq 2K_d r \leq \xi^{-1}r \implies m > -2.$$

Notemos que esto último se traduce en la desigualdad $l \geq 2$. Ahora bien, dado que $y \in B_\delta(x, r)$, por el Lema 2.44 se tiene $(x, y) \in U(r)$ o, equivalentemente, $(x, y) \in u(r, n)$ para algún n . Por la observación posterior al Lema 2.3 (que será utilizada con frecuencia a lo largo de esta demostración), podemos hallar una cadena $(x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_0)$ en X que satisface $x_0 = x$, $y_0 = y$ y tal que se cumple (2.14). A fines de comprobar (2.7), consideramos dos casos por separado.

Caso I ($n \geq l$): sea $k = n + 1 - l \geq 1$ y consideremos la d -bola $B_d(y_k, \xi^l r)$. Estudiando este conjunto, veremos que existe una δ -bola concéntrica y con radio comparable a s contenida en la intersección que figura en (2.7). Comenzamos por elegir $z \in B_d(y_k, \xi^l r)$ y estimar

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq K_d[d(z, y_k) + d(y_k, y)] \leq \xi^l K_d r + K_d^2[d(y_k, y_{k-1}) + d(y_{k-1}, y)] \\ &\vdots \\ &\leq \xi^l K_d r + K_d \sum_{i=0}^{k-1} K_d^{i+1} d(y_{k-1-i}, y_{k-i}) \\ &\leq \xi^{l-2} r \left(\xi^2 K_d + \sum_{i=1}^k (\xi K_d)^{i+1} \right) \\ &\leq \xi^{l-2} r \sum_{i=1}^{\infty} (\xi K_d)^i \\ &= \xi^{l-2} r \left(\frac{\xi K_d}{1 - \xi K_d} \right) \\ &< 2\xi^{l-1} K_d r. \end{aligned}$$

Esto demuestra la inclusión $B_d(y_k, \xi^l r) \subseteq B_d(y, 2\xi^{l-1} K_d r)$. Pero recurriendo a (2.17) vemos que $2\xi^{l-1} K_d \leq \xi^{l-2} = \xi^{m+1}$. Luego,

$$B_d(y_k, \xi^l r) \subseteq B_d(y, \xi^{m+1} r) \subseteq B_d(y, s) \subseteq B_\delta(y, s).$$

Por otro lado, considerando la cadena $(x_0, \dots, x_n, y'_n, \dots, y'_n)$ donde $y'_i = z$ para $0 \leq i < k+1$ y $y'_i = y_i$ para $k+1 \leq i \leq n$, vemos que

$$\begin{cases} (x_i, x_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i}t), & 0 \leq i < n \\ (y'_i, y'_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i}t), & 0 \leq i < n \\ (x_n, y_n) \in V_d(t) \end{cases}$$

para algún $t < r$. Pero dado que $x_0 = x$ y $y'_0 = z$, esto implica que $(x, z) \in u(t, n) \subseteq U(t)$. Por lo tanto,

$$\delta(x, z) = \inf\{r' > 0 : (x, z) \in U(r')\} \leq t < r \implies B_d(y_k, \xi^l r) \subseteq B_\delta(x, r).$$

Hemos comprobado que la d -bola $B_d(y_k, \xi^l r)$ está contenida simultáneamente en las δ -bolas $B_\delta(y, s)$ y $B_\delta(x, r)$. Para finalizar la demostración de este caso, observemos que $\xi^l r = \xi^3(\xi^m r) \geq \xi^3 s$ lo que, junto con (2.15), permite deducir

$$B_\delta(y_k, (2K_d^2)^{-1}\xi^3 s) \subseteq B_d(y_k, \xi^3 s) \subseteq B_d(y_k, \xi^l r) \subseteq B_\delta(y, s) \cap B_\delta(x, r).$$

Esto es, (2.16) se cumple con $\beta := (2K_d^2)^{-1}\xi^3$. Veamos que esta misma cantidad, que solo depende del valor de K_d , permite verificar (2.16) cuando $n < l$.

Caso II ($n < l$): notemos que, en este caso, se tiene $B_d(y, \xi^l r) \subseteq B_d(y, \xi^{n+1} r)$. Luego, si $z \in B_d(y, \xi^{n+1} r)$, la cadena de longitud $n+2$ conformada por los puntos $(x, x_0, \dots, x_n, y_n, \dots, y_0, z)$ satisface

$$\begin{cases} (x, x_0) \in V_d(\xi^{n+1} r), \\ (x_i, x_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i} r), & 0 \leq i < n \\ (y'_i, y'_{i+1}) \in V_d(\xi^{n-i} r), & 0 \leq i < n \\ (y_0, z) \in V_d(\xi^{n+1} r), \\ (x_n, y_n) \in V_d(r). \end{cases}$$

Esto se traduce en que $(x, z) \in u(r, n+1) \subseteq V(r)$. Por el Lema 2.44, tenemos que $z \in B_\delta(x, r)$ y, en consecuencia, $B_d(y, \xi^l r) \subseteq B_d(y, \xi^{n+1} r) \subseteq B_\delta(x, r)$. Además, dado que $l \geq m+1$,

$$B_d(y, \xi^l r) \subseteq B_\delta(y, \xi^l r) \subseteq B_\delta(y, \xi^{m+1} r) \subseteq B_\delta(y, s).$$

Luego, argumentando como en el caso anterior, se sigue fácilmente que

$$B_\delta(y, \beta s) \subseteq B_\delta(y, s) \cap B_\delta(x, r).$$

■

Corolario 2.46. Sea (X, d, μ) un ETH y sea δ la cuasi-métrica de Macías & Segovia construida a partir de d . Entonces, la familia $\{B_\delta(x, r)\}_{x \in X, r > 0}$ es una familia uniforme de subespacios de tipo homogéneo de (X, d, μ) .

Demostración. Se sigue inmediatamente de los Teoremas 2.31 y 2.45. ■

Pesos de Muckenhoupt y pesos distancia en espacios de tipo homogéneo

En este capítulo desarrollamos los resultados fundamentales de la teoría de pesos de Muckenhoupt en espacios de tipo homogéneo. Particularmente, demostramos la conexión que existe entre estos pesos y las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en este contexto. Si bien existen antecedentes que estudian este problema en ETHs ([AM84]), la mayor parte de estos resultados fueron adaptados de $\mathbb{R}^n$ a partir de fuentes clásicas en el área, como lo son el libro de de J. García Cuerva y J. L. Rubio de Francia [GR85] así como el más reciente trabajo de A. K. Lerner [Ler08] sobre acotación maximal en términos de bases. Una vez introducidos los conceptos básicos, enfocamos nuestra atención al caso de los pesos distancia. Para este tipo de pesos, proveemos algunos ejemplos y demostramos propiedades elementales para luego plantear los problemas a resolver en los capítulos venideros, cuya solución representa el principal aporte de esta tesis. Para finalizar, se resumen los antecedentes históricos donde se haya hecho uso o mención a los pesos distancia, así como sus aplicaciones y el tipo de condición geométrica ligada a los conjuntos asociados. En esta breve exposición, pondremos especial atención sobre aquellos trabajos recientes donde la condición geométrica en cuestión esté vinculada con alguna noción de porosidad y, sobre todo, con la condición de porosidad débil introducida en el Capítulo 1.

Contenidos

3.1	Maximal de Hardy-Littlewood	68
3.2	Acotación de la maximal con pesos y clases de Muckenhoupt	71
3.3	Pesos distancia en espacios de tipo homogéneo	77
3.4	Antecedentes en el estudio de pesos distancia	82

3.1 Maximal de Hardy-Littlewood

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. A lo largo de este capítulo, supondremos que (X, d, μ) posee la propiedad que las d -bolas forman una base de la topología τ_d . En este contexto, entendemos por **función medible** en X a toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que sea medible con respecto a las σ -álgebras $\mathcal{F}_\mu$ y $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ relativas a los conjuntos de salida y llegada, respectivamente. Las clases de Lebesgue para $1 \leq p < \infty$ quedan naturalmente definidas por la norma

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

mientras que, para $p = \infty$, se tiene

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{M \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Nótese que estas clases no dependen de la estructura cuasi-métrica del espacio. Por otro lado, la clase de funciones localmente integrables $L^1_{\operatorname{loc}}(X, d, \mu)$ se define como el conjunto de las funciones f medibles y de módulo integrable sobre cualquier d -bola:

$$\int_{B_d(x, r)} |f| d\mu < \infty, \quad \forall x \in X, r > 0.$$

Definición 3.1. Dada una función $f \in L^1_{\operatorname{loc}}(X, d, \mu)$, la función maximal de Hardy-Littlewood en (X, d, μ) se define como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y)$$

para todo $x \in X$, donde el supremo abarca todas las d -bolas $B \subseteq X$ que contienen al punto x . El operador sublineal $\mathcal{M}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Cabe destacar que es posible definir un operador maximal **centrado** $\mathcal{M}^c$ mediante la fórmula

$$\mathcal{M}^c f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{\mu(B_d(x, r))} \int_{B_d(x, r)} |f(y)| d\mu(y)$$

donde, a diferencia del operador maximal $\mathcal{M}$, sólo se consideran bolas centradas alrededor del punto x a la hora de tomar el supremo. En todo caso, ambos operadores resultan ser comparables entre sí, por lo que en general es suficiente considerar el operador introducido en la [Definición 3.1](#).

Al igual que en $\mathbb{R}^n$, el operador $\mathcal{M}$ resulta ser acotado en los espacios L^p , pudiendo demostrarse este hecho de una forma muy similar al caso euclídeo basada en cubrimientos con bolas de los conjuntos de nivel de $\mathcal{M}f$, donde f es una función localmente integrable arbitraria.

Proposición 3.2. Si $f \in L^1_{\operatorname{loc}}(X, d, \mu)$, entonces $\mathcal{M}f$ es semicontinua inferiormente. En particular, $\mathcal{M}f$ es medible.

Demostración. Dado $t > 0$, basta verificar que la preimagen $(\mathcal{M}f)^{-1}((t, \infty))$ es abierta. En otras palabras, veamos que

$$E_t := \{x \in X : \mathcal{M}f(x) > t\}$$

es abierto. Dado $x_0 \in E_t$, podemos hallar un par $(x, r) \in X \times (0, \infty)$ tal que $x_0 \in B_d(x, r)$ y

$$\frac{1}{\mu(B_d(x, r))} \int_{B_d(x, r)} |f(y)| d\mu(y) > t.$$

Sea ahora $z \in B_d(x, r)$, entonces

$$\mathcal{M}f(z) \geq \frac{1}{\mu(B_d(x, r))} \int_{B_d(x, r)} |f(y)| d\mu(y) > t.$$

Esto significa que $x_0 \in B_d(x, r) \subseteq E_t$. Esto es, $B_d(x, r)$ es un entorno abierto de x_0 y, como la elección de este punto fue arbitraria, se sigue que E_t es abierto. ■

Resulta claro por definición que $\|\mathcal{M}f\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(X, \mu)}$. El siguiente resultado resume las propiedades de acotación de $\mathcal{M}$ para el resto de exponentes $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 3.3. Sean (X, d, μ) y $\mathcal{M}$ como arriba. Entonces, existe una constante positiva $C = C(K_d, c_{\mu, d})$ tal que

3.3.1. para toda función $f \in L^1(X, \mu)$ y todo número $t > 0$ se cumple

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(X, \mu)};$$

3.3.2. dado $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(X, \mu)$, se cumple la desigualdad

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(X, \mu)} \leq C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(X, \mu)}.$$

Demostración. Comencemos por demostrar 3.3.1. Sean $f \in L^1(X, \mu)$ y $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t > 0$, consideramos el conjunto

$$E_{n,t} := \{x \in B_d(x_0, n) : \mathcal{M}f(x) > t\}.$$

Si $x \in E_{n,t}$, podemos hallar $y(x) \in X$ y $r(x) > 0$ tales que $x \in B_d(y(x), r(x))$ y

$$\int_{B_d(y(x), r(x))} |f(z)| d\mu(z) > t.$$

Luego,

$$\int_{B_d(x, 2K_d r(x))} |f(z)| d\mu(z) \geq \frac{\mu(B_d(y(x), r(x)))}{\mu(B_d(x, 2K_d r(x)))} \int_{B_d(y(x), r(x))} |f(z)| d\mu(z) > ct,$$

para cierta constante $c > 0$ que depende únicamente de K_d y $c_{\mu, d}$. Definimos ahora la función $R : E_{n,t} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mediante la asignación $x \mapsto R(x) = 2K_d r(x)$. Luego, dado que $E_{n,t}$ es acotado, podemos aplicar el Lema 2.21 (Lema de Wiener) para hallar una colección a lo sumo numerable de puntos $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq E_{n,t}$ y números $r_i = R(x_i)$ tales que $B_d(x_i, r_i) \cap B_d(x_j, r_j)$ siempre que $i \neq j$ y $E_{n,t} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, Cr_i)$ donde $C = C(K_d) > 0$ es una constante. Dado que el valor medio de la función $|f|$ sobre cada una de las bolas $B_d(x_i, r_i)$ está acotado inferiormente por la cantidad ct , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(E_{n,t}) &\leq \sum_{i \in I} \mu(B_d(x_i, Cr_i)) \leq C(K_d, c_{\mu, d}) \sum_{i \in I} \mu(B_d(x_i, r_i)) \\ &\leq \frac{1}{t} C(K_d, c_{\mu, d}) \sum_{i \in I} \int_{B_d(x_i, r_i)} |f(z)| d\mu(z) \\ &\leq \frac{1}{t} C(K_d, c_{\mu, d}) \|f\|_{L^1(X, \mu)}. \end{aligned}$$

Luego, 3.3.1 se sigue al tomar el límite $n \rightarrow \infty$. Dado que $\mathcal{M}$ es fuertemente acotado en $L^\infty(X, \mu)$, combinando esto con la acotación débil $(1, 1)$, es posible deducir la acotación fuerte (p, p) mediante un argumento clásico de interpolación (ver, por ejemplo, [Gra14, Teorema 1.3.2]).

■

Terminamos esta sección presentando resumidamente las hipótesis necesarias para obtener un teorema de diferenciación en nuestro espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) .

Definición 3.4. Dados $f \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$ y $x \in X$, diremos que x es un **punto de Lebesgue** de f si existe un número real $\tilde{f}(x)$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mu(B_d(x, r))} \int_{B_d(x, r)} |f(y) - \tilde{f}(x)| d\mu(y) = 0.$$

Teorema 3.5 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Supongamos que (X, d, μ) es un ETH tal que las funciones continuas son densas en $L^1(X, \mu)$ y sea $f \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$. Entonces, existe un conjunto $Y \subseteq X$ con $\mu(Y) = 0$ y tal que todo $x \in X \setminus Y$ es un punto de Lebesgue de f . Más aún,*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mu(B_d(x, r))} \int_{B_d(x, r)} f(y) d\mu(y) = f(x)$$

para todo $x \in X \setminus Y$.

Observación: una condición suficiente para que las funciones continuas sean densas en $L^1(X, \mu)$ es que el espacio cuasi-métrico dado por el par (X, d) sea completo, en cuyo caso toda función de módulo integrable puede ser aproximada en norma por funciones Lipschitz. Los detalles pueden consultarse en [Aim13, Teorema 5.3].

3.2 Acotación de la maximal con pesos y clases de Muckenhoupt

Una función $w : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible se denomina **peso** en (X, d, μ) . Un peso define naturalmente una medida $w d\mu$ sobre $\mathcal{F}_\mu$ mediante la asignación $U \mapsto w(U)$ donde

$$w(U) := \int_U w(x) d\mu(x).$$

Decimos que un peso es **duplicante** en el caso que la medida inducida satisfaga

$$0 < w(B_d(x, 2r)) \leq C_w w(B_d(x, r)) < \infty$$

para cierta constante C_w y para todo par $x \in X, r > 0$. Notemos que, si w es duplicante, se sigue inmediatamente que la terna $(X, d, w d\mu)$ es un nuevo espacio de tipo homogéneo.

En las páginas siguientes, retomamos el problema de acotación del operador $\mathcal{M}$ pero reemplazando la medida μ por la versión pesada $w d\mu$. La pregunta que surge naturalmente es, ¿para qué clase de pesos w podemos asegurar la acotación de dicho operador? Como se ha mencionado anteriormente, esta es la clase de pesos de Muckenhoupt.

Definición 3.6. Dado $1 < p < \infty$, el peso w pertenece a la clase $A_p(X, d, \mu)$ de Muckenhoupt si $w \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$ y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_B w(x) d\mu(x) \right) \left(\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C \quad (3.1)$$

para toda bola $B \subseteq X$. Decimos que w pertenece a la clase $A_1(X, d, \mu)$ si $w \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$ y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_B w(x) d\mu(x) \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in B} w(x) \quad (3.2)$$

para toda bola $B \subseteq X$.

En $\mathbb{R}^n$, una caracterización alternativa y frecuente de la condición A_1 consiste en solicitar que la función maximal del peso w esté mayorada por el propio w . Esta caracterización es válida aún en nuestro contexto.

Lema 3.7. La condición (3.2) es equivalente a

$$\mathcal{M}w(x) \leq C' w(x), \quad (3.3)$$

para μ -casi todo $x \in X$ y para cierta constante $C' > 0$.

Demostración. Claramente, (3.3) implica (3.2) con $C = C'$. Recíprocamente, sea $C' := c_{\mu,d}^m C$ donde m es el entero definido por las relaciones $2^{m-2} \geq K_d > 2^{m-3}$ y supongamos que se cumple (3.2). Si

$$E := \{x \in X : Mw(x) > C'w(x)\},$$

es suficiente demostrar que $\mu(E) = 0$. Para $x \in X$ y $r > 0$ arbitrarios, denotamos por

$$S(x, r) := \{y \in B_d(x, r) : w(y) < \text{ess inf}_{B_d(x, r)} w\}.$$

Por definición de ínfimo esencial, se sigue que $\mu(S(x, r)) = 0$. Ahora bien, si $y \in E$, podemos encontrar $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$ tales que $y \in B_d(x_0, r_0)$ y

$$\int_{B_d(x_0, r_0)} w d\mu > C'w(y). \quad (3.4)$$

Dado que X es separable (ver Teorema 2.29), existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso y numerable. Luego, existe $z \in D$ y un racional q tales que $d(x_0, z) \leq r_0$ y $2K_d r_0 < q \leq 4K_d r_0$. En particular, para todo $u \in B_d(x_0, r_0)$ se cumple

$$d(u, z) \leq K_d[d(u, x_0) + d(x_0, z)] \leq 2K_d r_0 < q.$$

Esto último se traduce en la inclusión $B_d(x_0, r_0) \subseteq B_d(z, q)$. Pero entonces, de (3.2) y (3.4) se sigue

$$C \text{ess inf}_{B_d(z, q)} w \geq \int_{B_d(z, q)} w d\mu \geq \frac{\mu(B_d(x_0, r_0))}{\mu(B_d(z, q))} \int_{B_d(x_0, r_0)} w d\mu > c_{\mu,d}^{-m} C'w(y) = Cw(y).$$

Esto quiere decir que $y \in S(z, q)$, lo que nos permite concluir que

$$E \subseteq \bigcup_{z \in D, q \in \mathbb{Q}} S(z, q),$$

que al ser una unión numerable de conjuntos nulos se tiene $\mu(E) = 0$, como queríamos ver. ■

Para el caso $1 < p < \infty$ es conveniente hacer uso de la notación $\sigma(x) := w(x)^{-\frac{1}{p-1}}$, con la cual podemos reescribir (3.1) como

$$\frac{w(B)\sigma(B)^{p-1}}{\mu(B)^p} \leq C.$$

Las constantes más pequeñas para las cuales se cumple ya sea (3.1) o (3.2) se denotan $[w]_{A_p(X, d, \mu)}$ o $[w]_{A_1(X, d, \mu)}$, respectivamente. Éstas reciben el nombre de constantes A_p de w . El próximo resultado muestra que la eventual condición A_p de un peso w es invariante ante cambios de cuasi-métricas equivalentes, existiendo una dependencia entre las nuevas constantes A_p y las de partida.

Proposición 3.8. Si $d' \sim d$ es otra cuasi-métrica en X , entonces

$$A_p(X, d', \mu) = A_p(X, d, \mu)$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Supongamos que $d' \sim_{C_1, C_2} d$ y que $w \in A_p(X, d, \mu)$. Por (2.2), sabemos que $B_d(x, C_2^{-1}r) \subseteq B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r)$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, luego

$$\begin{aligned} w(B_{d'}(x, r))\sigma(B_{d'}(x, r))^{p-1} &\leq w(B_d(x, C_1^{-1}r))\sigma(B_d(x, C_1^{-1}r))^{p-1} \\ &\leq [w]_{A_p(X, d, \mu)} \mu(B_d(x, C_1^{-1}r)) \\ &\leq C(C_1, C_2, c_{\mu, d}, [w]_{A_p(X, d, \mu)}) \mu(B_d(x, C_2^{-1}r)) \\ &\leq C(C_1, C_2, c_{\mu, d}, [w]_{A_p(X, d, \mu)}) \mu(B_{d'}(x, r)). \end{aligned}$$

Para demostrar la implicación restante basta con invertir los roles de d y d' . El caso $p = 1$ se sigue de forma análoga usando que $\text{ess inf}_A w \geq \text{ess inf}_B w$ siempre que $A \subseteq B$. ■

La siguiente es una lista (no exhaustiva) de las propiedades elementales de los pesos de Muckenhoupt. Aquí podemos mencionar propiedades como la contención $A_1 \subseteq A_p$, la dualidad y la duplicación.

Teorema 3.9 (Propiedades básicas de pesos A_p). *Sean $1 < p < q < \infty$ y $p' = \frac{p}{p-1}$ (el exponente de Hölder conjugado de p).*

$$3.9.1. \quad A_1(X, d, \mu) \subseteq A_p(X, d, \mu) \subseteq A_q(X, d, \mu).$$

$$3.9.2. \quad w \in A_p(X, d, \mu) \text{ si y solo si } \sigma \in A_{p'}(X, d, \mu).$$

$$3.9.3. \quad \text{Dados } 1 < r < p \text{ y } w \in A_p(X, d, \mu) \text{ entonces existe } \varepsilon \in (0, 1) \text{ tal que } w^\varepsilon \in A_r(X, d, \mu).$$

$$3.9.4. \quad \text{Si } w \in A_p(X, d, \mu) \text{ entonces } w \text{ es duplicante.}$$

$$3.9.5. \quad \text{Si } v, w \in A_p(X, d, \mu), \text{ entonces } \min\{v, w\}, \max\{v, w\} \in A_p(X, d, \mu). \text{ Esto vale también en el caso } p = 1.$$

Demostración.

(3.9.1) Dado que la aplicación $t \mapsto t^{\frac{q-1}{p-1}}$ es convexa, podemos utilizar la desigualdad de Jensen para obtener

$$\left(\int_B w(y)^{-\frac{1}{q-1}} d\mu(y) \right)^{q-1} \leq \left(\int_B w(y)^{-\frac{1}{p-1}} d\mu(y) \right)^{p-1} \leq \text{ess sup}_B w^{-1} = (\text{ess inf}_B w)^{-1},$$

multiplicando por el valor medio de w en B , se obtienen las inclusiones buscadas.

(3.9.2) Si $w \in A_p(X, d, \mu)$, dado que $(p-1)(p'-1) = 1$, elevando ambos lados de la desigualdad

$$\left(\int_B w d\mu \right) \left(\int_B \sigma d\mu \right)^{p-1} \leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}$$

a la potencia $p' - 1$, obtenemos la desigualdad equivalente

$$\left(\int_B \sigma d\mu \right) \left(\int_B \sigma^{-\frac{1}{p'-1}} d\mu \right)^{p'-1} \leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{p'-1}.$$

Esto es, $\sigma \in A_{p'}(X, d, \mu)$

(3.9.3) Si tomamos $\varepsilon := (r-1)(p-1)^{-1}$, claramente $\varepsilon \in (0, 1)$ y

$$\left(\int_B (w^\varepsilon)^{-\frac{1}{r-1}} d\mu \right)^{r-1} = \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{\varepsilon(p-1)}.$$

Por otro lado, dado que $t \mapsto t^{\frac{1}{\varepsilon}}$ es convexa, la desigualdad de Jensen implica que

$$\int_B w^\varepsilon d\mu \leq \left(\int_B w d\mu \right)^\varepsilon.$$

Combinando ambas observaciones, obtenemos

$$\left(\int_B w^\varepsilon d\mu \right) \left(\int_B (w^\varepsilon)^{-\frac{1}{r-1}} d\mu \right)^{r-1} \leq \left(\int_B w d\mu \right)^\varepsilon \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{\varepsilon(p-1)} \leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{r-1}{p-1}}.$$

(3.9.4) Dados $x \in X$ y $s > 0$, denotamos $B = B_d(x, s)$. Sea $E \subseteq B$ un subconjunto medible. Usando Hölder con los exponentes p y $p' = \frac{p}{p-1}$ y recurriendo a la condición A_p de w , estimamos

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_E w^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p}} d\mu \leq \left(\int_E w d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq w(E)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p}} \mu(B) \left(\frac{w(E)}{w(B)} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Reordenando, obtenemos

$$\frac{\mu(E)}{\mu(B)} \leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{w(E)}{w(B)} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.5)$$

En particular, reemplazando $s = 2r$ y $E = B_d(x, r)$ en (3.5) se llega a la condición de duplicación

$$w(B_d(x, 2r)) \leq c_{\mu, d} [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p}} w(B_d(x, r)).$$

(3.9.5) Notemos en primer lugar que si v, w son pesos localmente integrables, entonces tanto $\min\{v, w\}$ como $\max\{v, w\}$ lo son también. Si $v, w \in A_p(X, d, \mu)$ con $p > 1$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_B \max\{v, w\} d\mu &\leq \int_B v d\mu + \int_B w d\mu \\ &\leq [v]_{A_p(X, d, \mu)} \left(\int_B v^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{1-p} + [w]_{A_p(X, d, \mu)} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{1-p} \quad (3.6) \\ &\leq 2([v]_{A_p(X, d, \mu)} + [w]_{A_p(X, d, \mu)}) \left(\int_B \max\{v, w\}^{-\frac{1}{p-1}} d\mu \right)^{1-p}. \end{aligned}$$

Luego, $\max\{v, w\} \in A_p(X, d, \mu)$. Ahora bien, por 3.9.2, tenemos que $v^{-\frac{1}{p-1}}, w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}(X, d, \mu)$, por lo tanto

$$\min\{v, w\}^{-\frac{1}{p-1}} = \max\{v^{-\frac{1}{p-1}}, w^{-\frac{1}{p-1}}\} \in A_{p'}(X, d, \mu)$$

por lo probado anteriormente. Aplicando nuevamente 3.9.2, obtenemos que $\min\{v, w\} \in A_p(X, d, \mu)$.

Si $v, w \in A_1(X, d, \mu)$, para demostrar que $\max\{v, w\} \in A_1(X, d, \mu)$, basta con intercambiar las integrales en (3.6) por los correspondientes ínfimos esenciales y proceder de forma análoga. Por otro lado, notemos que, para una bola B fija, $\text{ess inf}_B \min\{v, w\} = \min\{\text{ess inf}_B v, \text{ess inf}_B w\}$. Podemos entonces asumir sin pérdida de la generalidad que $\text{ess inf}_B \min\{v, w\} = \text{ess inf}_B v$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_B \min\{v, w\} d\mu &\leq \int_B v d\mu \\ &\leq [v]_{A_1(X, d, \mu)} \text{ess inf}_B v \\ &\leq \max\{[v]_{A_1(X, d, \mu)}, [w]_{A_1(X, d, \mu)}\} \text{ess inf}_B \min\{v, w\}. \end{aligned}$$

Luego, $\min\{v, w\} \in A_1(X, d, \mu)$. ■

A continuación, consideramos la acotación de $\mathcal{M}$ con respecto a las medidas pesadas $wd\mu$, donde w es un peso de Muckenhoupt, comenzando con el caso $p = 1$.

Teorema 3.10 (Acotación débil $(1, 1)$ de $\mathcal{M}$ con pesos). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

3.10.1. *Existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(X, d, wd\mu)$ y todo número $t > 0$ se cumple*

$$w(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(X, wd\mu)}.$$

3.10.2. $w \in A_1(X, d, \mu)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que vale 3.10.1. Dada una d -bola arbitraria B y un subconjunto $S \subseteq B$ medible y tal que $\mu(S) > 0$, consideramos la función $f = \mathbb{1}_S$. Entonces,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu = \frac{\mu(S)}{\mu(B)} =: t_0.$$

Por la hipótesis sobre S , $t_0 > 0$. Además, tenemos que $t_0 \leq \mathcal{M}f(x)$ para todo $x \in B$. Luego, $B \subseteq \{x \in X : \mathcal{M}f(x) > t\}$ para $0 < t < t_0$. Por la acotación débil de la maximal, se sigue que

$$w(B) \leq w(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_X |f| wd\mu = \frac{C}{t} w(S),$$

nuevamente, para todo $0 < t < t_0$. Tomando el límite $t \rightarrow t_0$ y reorganizando la desigualdad, obtenemos

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq C \frac{w(S)}{\mu(S)}. \quad (3.7)$$

Notemos que si $\xi > \text{ess inf}_B w$, entonces el conjunto $S_\xi := \{x \in B : w(x) < \xi\}$ tiene medida positiva, por definición del ínfimo esencial. Luego, (3.7) implica $\mu(B)^{-1}w(B) \leq C\xi$, para todo $\xi > \text{ess inf}_B w$. Por lo tanto,

$$\int_B w d\mu \leq C \text{ess inf}_B w,$$

lo que prueba 3.10.2.

Recíprocamente, supongamos que se cumple 3.10.2 y que $f \in L^1(X, wd\mu)$, dado que si f no es de módulo integrable la desigualdad se cumple trivialmente. Supongamos también que $f \geq 0$. Para $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$ fijos, definimos, como antes,

$$E_{n,t} := \{x \in B_d(x_0, n) : \mathcal{M}f(x) > t\}.$$

A continuación, replicamos el argumento utilizado en la demostración del Teorema 3.3 para hallar una familia a lo sumo numerable de d -bolas $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ disjuntas dos a dos y constantes positivas c y C que dependen únicamente de K_d tales que

- ◇ $\int_{B_d(x_i, r_i)} f d\mu \geq ct$ y
- ◇ $E_{n,t} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, Cr_i)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 w(E_{n,t}) &= \int_{E_{n,t}} w d\mu \leq \sum_{i \in I} \int_{B_d(x_i, Cr_i)} w d\mu \\
 &\leq \sum_{i \in I} \mu(B_d(x_i, Cr_i)) \left(\int_{B_d(x_i, Cr_i)} w d\mu \right) \\
 &\leq \sum_{i \in I} \frac{1}{t} C(c_{d,\mu}, K_d) \left(\int_{B_d(x_i, r_i)} f d\mu \right) \left(\int_{B_d(x_i, Cr_i)} w d\mu \right) \\
 &\leq \sum_{i \in I} \frac{1}{t} C(c_{d,\mu}, K_d) \int_{B_d(x_i, r_i)} f(\mathcal{M}w) d\mu \\
 &\leq \frac{1}{t} C(c_{d,\mu}, K_d) \|f\|_{L^1(X, w d\mu)},
 \end{aligned}$$

donde se utilizó la caracterización (3.3) de la condición A_1 de w para obtener la última desigualdad. Dado que $w(E_{n,t}) \rightarrow w(\{x \in X : \mathcal{M}f(x)\})$ cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que

$$w(\{x \in X : \mathcal{M}f(x)\}) \leq \frac{1}{t} C(c_{d,\mu}, K_d) \|f\|_{L^1(X, w d\mu)}, \quad (3.8)$$

como debía ser demostrado. ■

Para demostrar la acotación fuerte de $\mathcal{M}$ en espacios L^p con pesos para $p > 1$, optamos por seguir el enfoque de A. K. Lerner en [Ler08], que se ajusta fácilmente al contexto de espacios de tipo homogéneo al tomar las bases adecuadas.

Definición 3.11. Sean w un peso en (X, d, μ) y $f \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$. Introducimos la siguiente versión pesada del operador maximal.

$$\mathcal{M}_w f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{w(B)} \int_B |f(y)| w(y) d\mu(y),$$

donde el supremo abarca todas las d -bolas en X que contienen al punto x .

Debido a 3.9.2 y 3.9.4, si $w \in A_p(X, d, \mu)$ entonces también $\sigma \in A_{p'}(X, d, \mu)$ y tanto $(X, d, w d\mu)$ como $(X, d, \sigma d\mu)$ son espacios de tipo homogéneo. Dado que $\mathcal{M}_w$ y $\mathcal{M}_\sigma$ son los operadores maximales estándar en dichos espacios, en tal caso podemos aseverar sin más que $\mathcal{M}_w$ es acotado en $L^q(X, w d\mu)$ y $\mathcal{M}_\sigma$ es acotado en $L^q(X, \sigma d\mu)$, para todo $1 < q < \infty$ gracias al Teorema 3.3.

Teorema 3.12 (Acotación fuerte (p, p) de $\mathcal{M}$ con pesos). Sean $1 < p < \infty$ y $p' = \frac{p}{p-1}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

3.12.1. $\mathcal{M}$ es acotado en $L^p(X, w d\mu)$ y en $L^{p'}(X, \sigma d\mu)$.

3.12.2. $w \in A_p(X, d, \mu)$.

Demostración. Veamos que 3.12.1 implica 3.12.2. Si $B \subseteq X$ es una bola arbitraria, entonces

$$\frac{\sigma(B)}{\mu(B)} = \frac{1}{\mu(B)} \int_B \sigma \mathbb{1}_B d\mu \leq \mathcal{M}(\sigma \mathbb{1}_B)(x)$$

para todo $x \in B$. Luego,

$$\left(\frac{\sigma(B)}{\mu(B)} \right)^p w(B) \leq \int_B \left(\frac{\sigma(B)}{\mu(B)} \right)^p w d\mu \leq \int_X |\mathcal{M}(\sigma \mathbb{1}_B)|^p w d\mu \leq C \int_B \sigma^p w d\mu = C \sigma(B),$$

dado que $\sigma^p w = \sigma$. Reordenando la desigualdad anterior, se obtiene $w \in A_p(X, d, \mu)$.

Consideremos ahora la implicación recíproca. Si B es una bola arbitraria y $f \in L^1_{\text{loc}}(X, d, \mu)$, podemos reescribir y estimar el valor medio de $|f|$ en B de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu &= \left(\frac{w(B)\sigma(B)^{p-1}}{\mu(B)^p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{\mu(B)}{w(B)} \left(\frac{1}{\sigma(B)} \int_B |f| d\mu \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{1}{w(B)} \int_B \left(\frac{1}{\sigma(B)} \int_B |f(y)\sigma(y)^{-1}| \sigma(y) d\mu(y) \right)^{p-1} d\mu(z) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p-1}} \left[\frac{1}{w(B)} \int_B (\mathcal{M}_\sigma(f\sigma^{-1})(z))^{p-1} w(z)^{-1} w(z) d\mu(z) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq [w]_{A_p(X, d, \mu)}^{\frac{1}{p-1}} [\mathcal{M}_w([\mathcal{M}_\sigma(f\sigma^{-1})]^{p-1} w^{-1})(x)]^{\frac{1}{p-1}} \end{aligned}$$

para todo $x \in B$. Luego, usando las propiedades de acotación de los operadores $\mathcal{M}_w$ y $\mathcal{M}_\sigma$, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_X |\mathcal{M}(f)|^p w d\mu &\lesssim \int_X |\mathcal{M}_w([\mathcal{M}_\sigma(f\sigma^{-1})]^{p-1} w^{-1})|^{p'} w d\mu \\ &\lesssim \int_X [\mathcal{M}_\sigma(f\sigma^{-1})]^{p'(p-1)} w^{-p'} w d\mu \\ &\lesssim \int_X [\mathcal{M}_\sigma(f\sigma^{-1})]^p \sigma d\mu \\ &\lesssim \int_X |f|^p \sigma^{-p} \sigma d\mu \\ &\simeq \int_X |f|^p w d\mu. \end{aligned}$$

Esto demuestra la acotación de $\mathcal{M}$ en $L^p(X, w d\mu)$, mientras que la acotación en $L^{p'}(X, \sigma d\mu)$ se sigue de forma análoga. $\blacksquare$

3.3 Pesos distancia en espacios de tipo homogéneo

El propósito principal de esta tesis es el estudio sistemático y la caracterización de pesos de Muckenhoupt obtenidos como potencias de funciones distancia a un subconjunto de un espacio métrico o cuasi-métrico. Estos pesos ya fueron estudiados en el ambiente de $\mathbb{R}^n$ en el [Capítulo 1](#), donde se mencionó que las funciones de la forma $x \mapsto |x|^\theta$ son ejemplos clásicos, obtenidos por primera vez por B. Muckenhoupt en [\[Muc72\]](#). En lo que sigue, veremos que las funciones distancia a un punto fijo posibilitan la obtención de pesos distancia en las clases A_p aún en espacios de tipo homogéneo con las hipótesis adecuadas, a saber, que sean γ -Ahlfors regulares con $\gamma > 0$.

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo γ -Ahlfors y sean $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tales que

$$C_1 r^\gamma \leq \mu(B_d(x, r)) \leq C_2 r^\gamma$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$. Para un punto fijo $x_0 \in X$, veamos que la función distancia a x_0 elevada a una potencia adecuada pertenece a $A_p(X, d, \mu)$.

Nos proponemos así encontrar constantes C y θ tales que se cumpla (3.1) con $B = B_d(x, r)$ para el peso $w = d(\cdot, x_0)^\theta$. Supongamos en primer lugar que θ es negativo. Sea $M > 1$ arbitrario y consideremos el caso en que $d(x, x_0) < Mr$. Una aplicación directa de la desigualdad triangular

permite comprobar la inclusión $B_d(x, r) \subseteq B_d(x_0, K_d(M+1)r)$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_{B_d(x, r)} w d\mu &\leq \int_{B_d(x_0, K_d(M+1)r)} w d\mu \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_d(x_0, 2^{-k} K_d(M+1)r) \setminus B_d(x_0, 2^{-k-1} K_d(M+1)r)} d(x, x_0)^{\theta} d\mu(x) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k-1} K_d(M+1)r)^{\theta} \mu(B_d(x_0, 2^{-k} K_d(M+1)r)) \\
 &\leq C(K_d, M, \theta, C_2, \gamma) r^{\gamma+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\gamma+\theta}.
 \end{aligned}$$

Si $\gamma + \theta > 0$, la serie a la derecha de la última desigualdad es convergente y, por lo tanto, la cantidad $C r^{\gamma+\theta}$ es una cota superior para la integral de partida, donde la constante C depende de K_d, M, θ, C_2 y γ . Usando la misma técnica para partir el dominio de integración original en coronas se puede verificar que

$$\begin{aligned}
 \int_{B_d(x, r)} \sigma d\mu &\leq \int_{B_d(x_0, K_d(M+1)r)} \sigma d\mu \\
 &\leq C(K_d, M, \theta, C_2, \gamma, p) r^{\gamma - \frac{\theta}{p-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\gamma - \frac{\theta}{p-1}}.
 \end{aligned}$$

Este sumatoria es siempre convergente y, al combinar esto con lo anterior, permite dar con la estimación

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{B_d(x, r)} w d\mu \right) \left(\int_{B_d(x, r)} \sigma d\mu \right)^{p-1} &\leq C(K_d, M, \theta, C_2, \gamma, p) r^{p\gamma} \\
 &\leq C(K_d, M, \theta, C_2, \gamma, p) \mu(B_d(x, r))^p
 \end{aligned}$$

para todo $\theta > -\gamma$. Notemos que, de haber tomado $\theta > 0$, la cota hallada para la integral sobre σ es válida si $\gamma - \theta(p-1)^{-1} > 0$, es decir, si $\theta < (p-1)\gamma$; mientras que la cota para la integral de w se cumple automáticamente. Por último, supongamos que $d(x, x_0) \geq Mr$. Si $y \in B_d(x, r)$, entonces

$$d(y, x_0) \leq K_d[d(y, x) + d(x, x_0)] \leq K_d[r + d(x, x_0)] \leq K_d[M^{-1} + 1]d(x, x_0)$$

y también

$$d(y, x_0) \geq K_d^{-1}d(x, x_0) - d(x, y) \geq K_d^{-1}[1 - M^{-1}]d(x, x_0).$$

Luego,

$$\left(\int_{B_d(x, r)} w d\mu \right) \left(\int_{B_d(x, r)} \sigma d\mu \right)^{p-1} \leq C(K_d, M, \theta, p).$$

Hemos probado que $d(\cdot, x_0)^{\theta} \in A_p(X, d, \mu)$ siempre que $-\gamma < \theta < \gamma(p-1)$ para todo espacio de tipo homogéneo γ -Ahlfors (X, d, μ) . A continuación, comenzamos a considerar funciones distancia a conjuntos arbitrarios en vez de aquellos que consisten en un único punto. Vale la pena recordar que estamos suponiendo implícitamente la propiedad de d -bolas abiertas para nuestro ETH general (X, d, μ) (en particular, ya no supondremos la condición de regularidad Ahlfors),

lo que permitirá demostrar la medibilidad de los pesos distancia generales. Dado un conjunto $E \subseteq X$ no vacío, definimos la **función distancia a E** (con respecto a la cuasi-métrica d) como¹³

$$d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Proposición 3.13. *Sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío, entonces*

3.13.1. *para todo $\theta \in \mathbb{R}$, la función $d(\cdot, E)^\theta : X \rightarrow [0, \infty)$ es medible;*

3.13.2. $\bar{E} = \{x \in X : d(x, E) = 0\}$.

Demostración. Para probar 3.13.1, notemos que para todo $t > 0$, la preimagen

$$d(\cdot, E)^{-1}((-\infty, t)) = \{x \in X : d(x, E) < t\} = \bigcup_{y \in E} B_d(y, t)$$

es un conjunto abierto, y por lo tanto $x \mapsto d(x, E)$ es medible. El enunciado se sigue dado que la función $t \mapsto t^\theta$ es continua en $\mathbb{R}$.

Consideremos ahora 3.13.2. Dado $x \in X \setminus \bar{E}$, existe cierto $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq X \setminus \bar{E}$, lo que implica que $d(x, E) \geq r > 0$. Luego, $d(x, E) = 0$ implica que $x \in \bar{E}$. Recíprocamente, si $x \in \bar{E}$, se cumple que $B_d(x, r) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. De esto se sigue que, para cada $r > 0$, existe algún $e_r \in E$ tal que $d(x, e_r) < r$. Esto es, $d(x, E) = 0$. ■

El siguiente resultado afirma que un peso distancia $d(\cdot, E)^\theta$ cumple una condición del tipo A_p si y solo si el peso $\tilde{d}(\cdot, E)^\theta$ calculado a partir de otra cuasi-métrica equivalente $\tilde{d}$ la satisface, siempre y cuando las bolas de ambas cuasi-métricas sean conjuntos abiertos en la topología que inducen.

Proposición 3.14. *Dados $\theta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ y $\tilde{d} \sim d$ una cuasi-métrica en X tal que las $\tilde{d}$ -bolas forman una base de τ_d , se tiene que $d(\cdot, E)^\theta \in A_p(X, d, \mu)$ si y sólo si $\tilde{d}(\cdot, E)^\theta \in A_p(X, \tilde{d}, \mu)$, para todo conjunto no vacío $E \subseteq X$.*

Demostración. Notemos que, dada la posibilidad de intercambiar los roles de d y $\tilde{d}$, es suficiente demostrar una de las implicaciones. Más aún, nos limitaremos a demostrar únicamente el caso $p = 1$, dado que para $p > 1$ los cambios necesarios en la demostración son mínimos. Supongamos entonces que $d(\cdot, E)^\theta \in A_1(X, d, \mu)$. Observemos que si $\theta \geq 0$, el resultado es trivial (en todo caso, consultar la [Proposición 3.17](#)), por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta < 0$. Sean $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tales que $C_1 d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq C_2 d(x, y)$. Dado $y \in X$ y $r > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B_{\tilde{d}}(y, r))} \int_{B_{\tilde{d}}(y, r)} \tilde{d}(x, E)^\theta d\mu(x) &\leq \frac{C_1^\theta}{\mu(B_{\tilde{d}}(y, r))} \frac{\mu(B_d(y, C_1^{-1}r))}{\mu(B_d(y, C_1^{-1}r))} \int_{B_d(y, C_1^{-1}r)} d(x, E)^\theta d\mu(x) \\ &\leq C_1^\theta c_{\mu, d}^m [d(\cdot, E)^\theta]_{A_1(X, d, \mu)} \operatorname{ess\,inf}_{B_d(y, C_1^{-1}r)} d(\cdot, E)^\theta \\ &\leq C_1^\theta c_{\mu, d}^m [d(\cdot, E)^\theta]_{A_1(X, d, \mu)} \operatorname{ess\,inf}_{B_{\tilde{d}}(y, r)} d(\cdot, E)^\theta \\ &\leq c_{\mu, d}^m \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^\theta [d(\cdot, E)^\theta]_{A_1(X, d, \mu)} \operatorname{ess\,inf}_{B_{\tilde{d}}(y, r)} \tilde{d}(\cdot, E)^\theta, \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad utilizamos la estimación

$$\frac{\mu(B_d(y, C_1^{-1}r))}{\mu(B_{\tilde{d}}(y, r))} \leq \frac{\mu(B_d(y, C_1^{-1}r))}{\mu(B_d(y, C_2^{-1}r))} \leq c_{\mu, d}^m$$

¹³Aquí optamos por emplear la notación $d(\cdot, E)$ en vez de la anterior $\operatorname{dist}(\cdot, E)$ para una mayor claridad en cuanto a qué cuasi-métrica se está considerando a la hora de determinar la distancia entre puntos o conjuntos.

$$\text{con } 2^{m-1} < \frac{C_2}{C_1} \leq 2^m. \quad \blacksquare$$

Una vez introducidos los pesos distancia en espacios de tipo homogéneo y probadas sus propiedades básicas, procedemos a enunciar los problemas centrales cuya resolución ocupará la mayor parte de los próximos capítulos. El siguiente es una generalización del [Problema 1.1](#) presentado en el [Capítulo 1](#) en el contexto de $\mathbb{R}^n$.

Problema 3.15. Caracterizar la familia de conjuntos no vacíos $E \subseteq X$ para los cuales existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $d(\cdot, E)^\theta$ es un peso no constante en la clase $A_1(X, d, \mu)$.

Sea $\Sigma_1(X, d, \mu)$ la familia de subconjuntos de X que son solución al [Problema 3.15](#). Al igual que en el [Capítulo 1](#), veremos que los conjuntos en $\Sigma_1(X, d, \mu)$ están caracterizados por una noción de porosidad equivalente a la de porosidad débil en $\mathbb{R}^n$ más una hipótesis adicional de duplicación del poro maximal introducida por C. Mudarra en [\[Mud25\]](#). Estos resultados no solo generalizan la teoría desarrollada en [\[And+24\]](#), sino también los hallados en [\[Mud25\]](#) en el contexto de espacios métricos con medida duplicante, todo a través de un mecanismo de prueba basado en la cuasi-métrica de Macías y Segovia y la aplicación de los lemas de cubrimiento introducidos en el [Capítulo 2](#). Además, se darán condiciones suficientes sobre (X, d, μ) para garantizar que $\Sigma_1(X, d, \mu) \neq \emptyset$.

Una vez caracterizada la familia $\Sigma_1(X, d, \mu)$, el siguiente objetivo es la búsqueda de solución para un problema aún más general: el de los pesos distancia que cumplan la condición A_p , con $p > 1$. En lo que sigue, denotamos $A_\infty(X, d, \mu) = \bigcup_{p>1} A_p(X, d, \mu)$.

Problema 3.16. Dado $1 < p \leq \infty$, caracterizar la familia de conjuntos no vacíos $E \subseteq X$ para los cuales existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $d(\cdot, E)^\theta$ es un peso no constante en la clase $A_p(X, d, \mu)$.

En analogía con lo anterior, denotamos por $\Sigma_p(X, d, \mu)$ a la familia de subconjuntos de X que son solución al [Problema 3.16](#). Este problema es considerado en el [Capítulo 5](#), para lo cual será necesario dar con una condición geométrica aún más general que la de porosidad débil y basada en el control de las “fracciones de poros grandes y pequeños”, como se adelantó en la sección final del [Capítulo 1](#). Si bien se discutirá una primera caracterización válida en todo espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) , una caracterización más completa y reminiscente de la condición de porosidad débil será obtenida en $\mathbb{R}^n$.

Antes de profundizar sobre la geometría intrínseca de los conjuntos contenidos en las familias $\Sigma_1(X, d, \mu)$ y $\Sigma_p(X, d, \mu)$, es posible deducir algunas de sus propiedades a partir de las propiedades de los mismos pesos de Muckenhoupt introducidas en las secciones previas de este capítulo.

Proposición 3.17 (Propiedades de las clases solución $\Sigma_p(X, d, \mu)$). Sean $1 \leq p \leq \infty$, $E \in \Sigma_p(X, d, \mu)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $w := d(\cdot, E)^\theta \in A_p(X, d, \mu)$ es un peso no constante.

$$3.17.1. \quad \Sigma_1(X, d, \mu) \subseteq \Sigma_p(X, d, \mu) \subseteq \Sigma_q(X, d, \mu), \forall q \geq p.$$

$$3.17.2. \quad \text{Si } p = 1, \text{ necesariamente se cumple}^{14} \theta < 0.$$

¹⁴Si $p > 1$, en general sólo podemos asegurar que $\theta \neq 0$. De hecho, si (X, d, μ) es γ -Ahlfors ya sabemos que existen pesos distancia con potencias tanto positivas como negativas en la clase $A_p(X, d, \mu)$ gracias al ejemplo desarrollado al comienzo de esta sección.

3.17.3. Si $1 < p, q < \infty$, entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ y $d(\cdot, E)^\beta$ pertenecen a $A_q(X, d, \mu)$. En particular, tenemos que

$$\Sigma_p(X, d, \mu) = \Sigma_\infty(X, d, \mu)$$

para todo $1 < p \leq \infty$.

3.17.4. $\mu(\bar{E}) = 0$. En particular, E es nunca denso.

3.17.5. Si $E_1, \dots, E_n \in \Sigma_p(X, d, \mu)$, entonces $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \Sigma_p(X, d, \mu)$. Más aún, esto es válido también para $p = 1$.

Demostración.

(3.17.1) Se sigue inmediatamente de las inclusiones $A_1(X, d, \mu) \subseteq A_p(X, d, \mu) \subseteq A_q(X, d, \mu)$.

(3.17.2) Si tuviéramos que $\theta = 0$, entonces $w \equiv 1$, contradiciendo la hipótesis. Supongamos ahora que $\theta > 0$. Dado $y \in E$, escribimos $B^{(k)} := B_d(y, k)$ y $\mu_k := \mu(B^{(k)})$. Luego, si w estuviera en A_1 ,

$$\int_X w d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B^{(k)}} d(\cdot, E)^\theta d\mu \leq [w]_{A_1(X, d, \mu)} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\mu_k \operatorname{ess\,inf}_{B^{(k)}} d(\cdot, E)^\theta \right).$$

Tomando $0 < \varepsilon_k < \min\{k, k^{-\frac{1}{\theta}} \mu_k^{-\frac{1}{\theta}}\}$, se sigue que $B_d(y, \varepsilon_k) \subseteq B^{(k)}$. Además, $w(x) \leq \varepsilon_k^\theta \leq k^{-1} \mu_k^{-1}$ para todo $x \in B_d(y, \varepsilon_k)$ y, dado que $\mu(B_d(y, \varepsilon_k)) > 0$, se cumpliría que

$$\operatorname{ess\,inf}_{B^{(k)}} d(\cdot, E)^\theta \leq \frac{1}{k \mu_k},$$

que, combinado con lo anterior, permite deducir que $\int_X w d\mu = 0$, lo que a su vez implica $w \equiv 0$. Esto es una nueva contradicción con la hipótesis, por lo que debe ser $\theta < 0$.

(3.17.3) Afirmamos en primer lugar que existe $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$ con el mismo signo que θ (que es no nulo por el ítem previo) tal que $d(\cdot, E)^{\hat{\theta}} \in A_q(X, d, \mu)$. En efecto, si $p \leq q$, entonces es inmediato que $w \in A_q(X, d, \mu)$, por lo que basta con tomar $\hat{\theta} = \theta$. Si en cambio tenemos que $p > q$, por 3.9.3, sabemos que $d(\cdot, E)^{\frac{\theta(q-1)}{p-1}} \in A_q(X, d, \mu)$, por lo que en este caso debemos tomar $\hat{\theta} = \theta(q-1)(p-1)^{-1}$. Por otro lado, recurriendo a un argumento de dualidad (ver 3.9.2) podemos ver que $d(\cdot, E)^{\theta_0} \in A_{p'}(X, d, \mu)$ para $\theta_0 := \theta(1-p)^{-1}$. Luego, la afirmación anterior aplicada al peso $d(\cdot, E)^{\theta_0}$ permite hallar $\hat{\theta}_0$ con signo opuesto a θ tal que $d(\cdot, E)^{\hat{\theta}_0} \in A_q(X, d, \mu)$. Finalmente, tomando ya sea $\alpha = -\hat{\theta}$ y $\beta = \hat{\theta}_0$ si $\theta < 0$ o bien $\alpha = -\hat{\theta}_0$ y $\beta = \hat{\theta}$ si $\theta > 0$, obtenemos el resultado buscado.

(3.17.4) Por 3.17.3, tenemos que $w_\alpha := d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_q(X, d, \mu)$ para algún $1 \leq q < \infty$ y cierto $\alpha > 0$. En particular, tenemos que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in L_{\text{loc}}^1(X, d, \mu)$. Dado que $w_\alpha|_{\bar{E}} = \infty$, necesariamente debe cumplirse $\mu(\bar{E}) = 0$.

(3.17.5) Basta demostrar que $E_1 \cup E_2 \in \Sigma_p(X, d, \mu)$ siempre que $E_1, E_2 \in \Sigma_p(X, d, \mu)$ para $p \geq 1$. Ahora bien, si θ_1 y θ_2 son tales que $d(\cdot, E_i)^{\theta_i} \in A_p(X, d, \mu)$, podemos suponer por 3.17.3 que ambos números son positivos. Además, por 3.9.1 y la demostración de 3.9.3, se sigue que $d(\cdot, E_i)^{\min\{\theta_1, \theta_2\}} \in A_p(X, d, \mu)$. Luego,

$$d(\cdot, E_1 \cup E_2)^{\min\{\theta_1, \theta_2\}} = \min\{d(\cdot, E_1)^{\min\{\theta_1, \theta_2\}}, d(\cdot, E_2)^{\min\{\theta_1, \theta_2\}}\} \in A_p(X, d, \mu)$$

por 3.9.5. ■

La propiedad 3.17.1 nos conduce a considerar únicamente los pesos distancia de la forma $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$ en el Capítulo 4. De hecho, también supondremos que la potencia del peso distancia es negativa incluso en el Capítulo 5, dado que en este caso la potencia es irrelevante. En efecto, debido a 3.17.3, para verificar que $E \in \Sigma_p(X, d, \mu)$ con $p > 1$ es suficiente hallar una potencia θ de cualquier signo tal que $d(\cdot, E)^\theta \in A_q(X, d, \mu)$, para cualquier $1 \leq q \leq \infty$.

3.4 Antecedentes en el estudio de pesos distancia

Como es de esperar, sobre todo por las aplicaciones discutidas en la Introducción, los pesos distancia han sido estudiados en diversas fuentes y en distintos espacios ambiente. Antes de comenzar a evaluar los Problemas 3.15 y 3.16, presentamos una cronología compuesta por trabajos en donde se hayan estudiado condiciones necesarias sobre conjuntos E para asegurar que sus pesos distancia asociados cumplieran un condición del tipo Muckenhoupt.

Uno de los primeros trabajos en esta línea se remonta a 1991 de la mano de T. Horiuchi. En [Hor91], Horiuchi consideró la siguiente condición geométrica para un conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto F satisface la condición $P(s)$ para cierto $0 < s \leq n$ si existe una constante $D > 0$ tal que

$$|B(x, r) \cap (F(\varepsilon) \setminus F(\varepsilon'))| \lesssim \varepsilon^{s-\min\{1, s\}} |\varepsilon - \varepsilon'| r^{n-s}$$

para $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon \leq 2r \leq D$. Si F satisface la condición $P(s)$, demostró entonces que $\text{dist}(\cdot, F)^\theta \in A_1(\mathbb{R}^n)$ para $-s < \theta \leq 0$ y $\text{dist}(\cdot, F)^\theta \in A_p(\mathbb{R}^n)$ para $-s < \theta \leq s(p-1)$.

En el año 2005, A. V. Vasin introdujo la noción de porosidad débil para subconjuntos de la circunferencia unitaria en [Vas03], siendo que los detalles de esta caracterización ya han sido discutidos en el Capítulo 1. Lo llamativo es que, aún cuando este es el primer ejemplo de una condición necesaria y suficiente para garantizar la condición A_1 de los pesos distancia, no fue hasta muchos años después que estos resultados pudieron ser extendidos a $\mathbb{R}^n$.

R. Durán & F. López García prueban en el 2010 ([DL10]) que si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto contenido en un conjunto m -regular K , entonces $\text{dist}(\cdot, F)^\theta \in A_p(\mathbb{R}^n)$ si $-(n-m) < \theta < (n-m)(p-1)$. Aquí, con m -regular nos referimos a que se cumpla

$$C^{-1}r^m < \mathcal{H}^m(B(x, r) \cap F) < Cr^m$$

para cierta constante $C > 0$ y para todo $x \in F$ y $r > 0$; siendo $\mathcal{H}^m$ la m -medida exterior de Hausdorff introducida en la Sección 2.5. Pocos años después estos resultados fueron extendidos a subconjuntos $F \subseteq X$ s -Ahlfors con medida ν , donde (X, d, μ) es γ -Ahlfors y $0 \leq s < \gamma$ en [Aim+14].

Más recientemente, en el 2019 B. Dyda, L. Ihnatsyeva, J. Lehtbäck, H. Tuominen & A. V. Vähäkangas ([Dyd+19]) mostraron lo siguiente en el contexto de un espacio métrico γ -Ahlfors (X, d, μ) . Si $F \subseteq X$ es cerrado y $\dim_A F < \gamma$ (donde $\dim_A F$ denota la dimensión de Assouad discutida en la Sección 2.3), entonces $d(\cdot, F)^\theta \in A_1(X, d, \mu)$ si y solo si $\dim_A F - \gamma < \theta \leq 0$, mientras que $d(\cdot, F)^\theta \in A_p(X, d, \mu)$ si y solo si $\dim_A F - \gamma < \theta < (\gamma - \dim_A F)(p-1)$. Además de este resultado principal, los autores mostraron algunos resultados parciales al eliminar la hipótesis de Ahlfors regularidad del espacio X , muchos de estos articulando entre distintas nociones tales como la denominada condición de Aikawa ([Aik91; AE96]) y la porosidad en sentido fuerte: $E \subseteq X$ se dice poroso si existe $0 < c < 1$ tal que para toda bola $B_d(x, r)$ existe $y \in X$ tal que $B_d(y, cr) \subseteq B_d(x, r) \setminus E$, por lo que en este trabajo vuelve a surgir la noción de porosidad de conjuntos para caracterizar las propiedades A_p de los respectivos pesos distancia.

En 2024 es publicado el trabajo [And+24] de los autores T. C. Anderson, J. Lehtbäck, C. Mudarra & A. V. Vähäkangas al que ya se ha hecho mención en varias oportunidades. En el mismo se

extendió el concepto de porosidad débil a $\mathbb{R}^n$. Aquí, no solo se demostró el Teorema 1.2 que caracteriza a todos los subconjuntos de la familia $\Sigma_1(\mathbb{R}^n)$, sino que también se dan a conocer múltiples ejemplos de interés y se establecen intervalos para las potencias α a fin de garantizar que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R}^n)$ en términos del denominado *exponente de Muckenhoupt*, que de alguna forma generaliza a la codimensión inferior de Assouad utilizada en [Dyd+19] con motivos similares.

A partir de la contribución de [And+24], han surgido algunos trabajos posteriores debidos a diversos autores donde se ha buscado extender sus resultados a contextos más generales. Aquí cabe mencionar en primer lugar el trabajo de C. Mudarra [Mud25] en el que se propuso la siguiente definición de porosidad débil en un espacio métrico (X, d) munido de una medida duplicante μ . Un conjunto $E \subseteq X$ se dice débilmente poroso si existen constantes $0 < \sigma, \gamma < 1$ tales que para toda bola $B = B_d(x, r)$ en X podemos hallar una colección finita de bolas disjuntas $B_d(x_i, r_i), \dots, B_d(x_N, r_N)$ (donde $N = N(B)$) contenidas en $B \setminus E$ que cumplen

- ◇ $r_i \leq 2r$, para todo $i = 1, \dots, N$;
- ◇ $r_i \geq \gamma \rho_{d,E}(B)$ para todo $i = 1, \dots, N$;
- ◇ $\sum_{i=1}^N \mu(B_d(x_i, r_i)) \geq \sigma \mu(B)$.

La función que figura en el segundo ítem está dada por

$$\rho_{d,E}(B) := \sup\{0 < s \leq 2r : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B \setminus E\}.$$

Ésta es una generalización de la función de poro maximal introducida en la Definición 1.3 en el primer capítulo. En su trabajo, Mudarra logró demostrar que la condición de porosidad débil en espacios métricos más la hipótesis adicional que la función $\rho_{d,E}$ duplica, en el sentido que $\rho_{d,E}(B_d(x, 2r)) \lesssim \rho_{d,E}(B_d(x, r))$, es necesaria y suficiente para garantizar la existencia de una potencia $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$, extendiendo así el resultado de [And+24] a este nuevo contexto. Siguiendo los lineamientos de Anderson *et al* y su enfoque basado en particiones diádicas de cubos descrito en la Sección 1.2, Mudarra utilizó sistemas diádicos más generales en el sentido de [Chr90] y [HK12] para adaptar las mismas pruebas a espacios métricos generales.

En [AGG24], la definición de conjuntos débilmente porosos de Mudarra es adaptada a espacios de tipo homogéneo y se demuestra que, conjuntamente con la hipótesis de duplicación de la función de poro maximal, equivalen a la condición $A_1(X, d, \mu)$ para algunos sus pesos distancia. El Capítulo 4 está basado en este trabajo, cuyos resultados no solo generalizan aún más los del artículo [Mud25], sino que se demuestran a partir de técnicas diferentes y basadas en el enfoque simplificado ensayado en la Sección 1.3. Aquí, los sistemas diádicos de Christ son reemplazados por lemas de cubrimiento y cambios de cuasi-métricas adecuados al problema en cuestión. Además, se plantean nuevos ejemplos y se dan a conocer propiedades básicas de los conjuntos débilmente porosos definidos en espacios cuasi-métricos.

El Problema 3.16 es considerado en el trabajo [Góm26] así como en el posterior artículo [PU25], ambos en el contexto de $\mathbb{R}^n$. Si bien el resultado principal de [PU25], cuyas demostraciones son de carácter mayormente analíticas, se halla enunciado de una forma más general que la de [Góm26] (donde las demostraciones poseen en vez un enfoque geométrico), veremos en el Capítulo 5 que los dos enfoques planteados llegan a un resultado significativamente similar a la hora de caracterizar los conjuntos de la familia $\Sigma_p(\mathbb{R}^n)$. Más aún, veremos que algunas de las caracterizaciones planteadas en $\mathbb{R}^n$ pueden de alguna forma extenderse a espacios de tipo homogéneo.

Por último, en [Aim+25], se considera el problema de caracterización de los subconjuntos de la recta real que admiten pesos distancia en las clases laterales $A_1^-(\mathbb{R})$ y $A_1^+(\mathbb{R})$, para lo cual se introduce el concepto de conjuntos débilmente porosos por izquierda y débilmente porosos por derecha, respectivamente. Esta nueva teoría de porosidad débil lateral se desarrolla en el Capítulo 6, donde además se discutirán ejemplos y se demostrará cómo estas nociones laterales se relacionan adecuadamente con la noción clásica de porosidad débil euclídea en el caso $n = 1$.

Habiendo introducido la teoría necesaria a lo largo de estos últimos dos capítulos así como los antecedentes pertinentes, consideramos en el capítulo siguiente la búsqueda de una solución al Problema 3.15.

Caracterización de pesos distancia A_1 sobre espacios de tipo homogéneo

Este capítulo contiene aportes significativos en la caracterización de los pesos distancia que cumplen la condición A_1 , dándose a conocer una solución al Problema 3.15 donde la única hipótesis adicional que se solicita sobre el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) es que el conjunto de las d -bolas forme una base para la topología cuasi-métrica. Basándonos en los resultados previos de C. Mudarra en el contexto de espacios métricos con medidas duplicantes, veremos que la familia $\Sigma_1(X, d, \mu)$ consiste de todos los conjuntos que cumplen con una versión general de la condición de porosidad débil y, además, su denominada función de poro maximal cumple cierta propiedad de duplicación que, en el caso de $\mathbb{R}^n$, se satisface naturalmente. Los argumentos detrás de estos resultados son originales porque están relacionados con lemas de cubrimiento como los introducidos en la Sección 2.3 y el uso de la cuasi-métrica de Macías y Segovia, discutida en la Sección 2.6. Asimismo, se darán a conocer nuevos ejemplos de esta clase de conjuntos y se demostrarán algunas propiedades adicionales. Los resultados principales de este capítulo se encuentran en [AGG24].

Contenidos

4.1	Función de poro maximal	86
4.2	Primeras nociones de porosidad	90
4.3	Porosidad débil en espacios de tipo homogéneo	92
4.4	La condición A_1 del peso implica porosidad débil	100
4.5	La porosidad débil como condición suficiente	103

4.1 Función de poro maximal

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. A lo largo de este capítulo, supondremos que las d -bolas son conjuntos abiertos en τ_d . Recordemos que la propiedad que las d -bolas sean abiertas, o equivalentemente que $\{B_d(x, r)\}_{x \in X, r > 0}$ sea base de τ_d , es necesaria para garantizar la medibilidad de la función distancia a un subconjunto arbitrario de X , y es por esta razón una hipótesis del todo necesaria a la hora de caracterizar los conjuntos de la familia $\Sigma_1(X, d, \mu)$. Más aún, esta hipótesis no es para nada restrictiva, teniendo en cuenta que toda clase de equivalencias en $\mathcal{D}(X)/\sim$ contiene al menos un representante con esta propiedad, tal como se desprende del Corolario 2.15.

Para poder introducir la noción de porosidad de conjuntos en (X, d, μ) es necesario contar en primer lugar con una definición de función de poro maximal con respecto al conjunto $E \subseteq X$ en cuestión, que en el caso de la recta real fue definida en la [Sección 1.3](#) como la función que a un dado intervalo I le asigna el supremo del conjunto

$$\{s > 0 : \exists y \in I \text{ tal que } (y - s, y + s) \subseteq I \setminus E\}.$$

Este conjunto colecciona todos los “radios” de poros en I con respecto a E , entendiendo como poros a los subintervalos $(y - s, y + s) \subseteq I \setminus E$. Luego, se entiende naturalmente que un poro en $B = B_d(x, r)$ con respecto a E no es más que una bola $B_d(y, s) \subseteq B \setminus E$; aunque a la hora de considerar todos los posibles radios de poros en B es conveniente restringirlos a una cota máxima de $2K_d r$. Esto se debe a que podría llegar a darse la situación en que s sea considerablemente mayor que r y aún así se cumpla la contención $B_d(y, s) \subseteq B \setminus E$. Pero si este es el caso, entonces $B_d(y, s) = B_d(y, 2K_d r)$, lo que justifica la cota elegida¹⁵. Este hecho fue notado por Mudarra en [\[Mud25\]](#), con la salvedad que, al trabajar en espacios métricos, la cota elegida en tal caso fue de $2r$ (lo que coincide con tomar $K_d = 1$).

Definición 4.1. Dado un conjunto no vacío $E \subseteq X$ y una bola $B_d(x, r)$, consideramos el conjunto

$$\Lambda(x, r; d, E) = \{0 < s \leq 2K_d r : \text{existe } y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r) \setminus E\}.$$

La **función de poro maximal** (con respecto a d y E) se define entonces como

$$\rho_{d,E}(B_d(x, r)) := \sup \Lambda(x, r; d, E). \quad (4.1)$$

En caso que $\Lambda(x, r; d, E) = \emptyset$, asignamos el valor $\rho_{d,E}(B_d(x, r)) = 0$.

A diferencia del caso $X = \mathbb{R}$, no es posible garantizar la existencia de un radio máximo en el sentido de la [Proposición 1.4](#), por lo que siempre deberá tenerse en cuenta el carácter de supremo en (4.1). Por otro lado, dado que

$$B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r) \setminus E \implies B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r + \varepsilon) \setminus E$$

para cualquier valor de $\varepsilon > 0$, se sigue que $\Lambda(x, r; d, E) \subseteq \Lambda(x, r + \varepsilon; d, E)$ y que $\rho_{d,E}$ es una función monótona con respecto al radio cuando el centro está fijo, lo cual enunciamos a continuación en forma de lema para facilitar futuras referencias.

Lema 4.2. Dado $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, la función $\rho_{d,E}(B_d(x, \cdot)) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es no decreciente para todo $x \in X$.

Definición 4.3. Diremos que la función $\rho_{d,E}$ es **duplicante** si existe una constante $C_{d,E} > 0$ tal que

$$\rho_{d,E}(B_d(x, 2r)) \leq C_{d,E} \rho_{d,E}(B_d(x, r)), \quad (4.2)$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

¹⁵El lector podría formarse la impresión de que la elección de esta cota responde más a criterios de conveniencia que de necesidad. No obstante, se prevé que el valor de la función de poro maximal en B , elevado a una potencia adecuada, constituya una cantidad comparable al ínfimo esencial del peso distancia en dicho conjunto (al menos si se establece una analogía con la caracterización discutida en el [Capítulo 1](#)). En consecuencia, esta restricción resulta, en realidad, esencial para la caracterización que se tiene en consideración.

La duplicación del poro maximal diádico (1.3) es una consecuencia automática de la condición de porosidad débil en $\mathbb{R}^n$ y demostrada en [And+24]. En espacios de tipo homogéneo esto deja de ser cierto (ver discusión en los párrafos finales de la Sección 4.3), por lo que será necesario tomarlo como hipótesis general sobre el conjunto en estudio.

Una función de poro maximal que cumple (4.2) sirve como cota superior para la función distancia a su conjunto asociado, al menos en los puntos contenidos en d -bolas que intersecan con dicho conjunto.

Lema 4.4. *Sea E un conjunto no vacío en X y sea $B = B_d(y, r)$ una bola arbitraria. Si $\rho_{d,E}$ es duplicante y $B \cap E \neq \emptyset$, entonces existe una constante $C_0 > 0$ independiente de B tal que¹⁶*

$$d(x, E) \leq C_0 \rho_{d,E}(B), \text{ para todo } x \in B \setminus \bar{E}. \quad (4.3)$$

Demostración. Observemos en primer lugar que si se diera el caso en que $\rho_{d,E}(B) = 0$, esto implicaría que $d(x, E) = 0$. Para verificar esto, comencemos tomando un punto $x \in B$. Como las bolas son abiertas en X , existe algún $0 < s_0 \leq 2K_d r$ tal que $B_d(x, s) \subseteq B$ para todo $s \leq s_0$. Si $\rho_{d,E}(B) = 0$, entonces $s \notin \Lambda(y, r; d, E)$ y debería existir $e_s \in E$ tal que $e_s \in B_d(x, s)$ para cada $0 < s \leq s_0$, lo cual implicaría que $d(x, E) = 0$ para todo $x \in B$. En este caso, por lo tanto, $B \setminus \bar{E} = \emptyset$ y no hay nada que demostrar.

Si $\rho_{d,E}(B) > 0$, tenemos que $B \setminus \bar{E} \neq \emptyset$. Fijemos un punto x en $B \setminus \bar{E}$ y definamos $t = d(x, E)$. Luego, $0 < t \leq 2K_d r$, donde la cota superior se sigue del hecho que $B \cap E \neq \emptyset$. Por otro lado, dado $z \in B_d(x, t)$, se cumple que

$$d(y, z) \leq K_d[d(y, x) + d(x, z)] \leq K_d[r + t] \leq K_d[1 + 2K_d]r.$$

Esto significa que $B_d(x, t) \subseteq B_d(y, K_d[1 + 2K_d]r) \setminus E$ y, en consecuencia, $t \in \Lambda(y, K_d[1 + 2K_d]r; d, E)$. A partir de esto, obtenemos

$$d(x, E) = t \leq \rho_{d,E}(B_d(y, K_d[1 + 2K_d]r)) \leq C_{d,E}^m \rho_{d,E}(B),$$

para todo $x \in B \setminus \bar{E}$, donde m es tal que $2^{m-1} < K_d(2K_d + 1) \leq 2^m$. ■

Una de las propiedades más interesantes de la función $\rho_{d,E}$ es que se comporta bien ante cambios de cuasi-métricas equivalentes, hasta el punto que si se cumple (4.2), entonces $\rho_{\tilde{d},E}$ también posee la propiedad de duplicación si $d \sim \tilde{d}$. Para ver esto, es conveniente notar lo siguiente. Observemos que si $d, \tilde{d}$ son dos cuasi-métricas equivalentes con $d \sim_{C_1, C_2} \tilde{d}$, entonces

$$\tilde{d}(x, z) \leq C_2 d(x, z) \leq C_2 K_d[d(x, y) + d(y, z)] \leq \frac{C_2}{C_1} K_d[\tilde{d}(x, y) + \tilde{d}(y, z)]$$

para toda terna de puntos $x, y, z \in X$. Despejando y recurriendo a la definición de constantes triangulares óptimas introducida en la Sección 2.2, obtenemos que $K_{\tilde{d}} \leq C_2 C_1^{-1} K_d$. Más aún, intercambiando los roles de d y $\tilde{d}$ en las estimaciones anteriores podemos deducir la relación

$$\frac{C_1}{C_2} \leq \frac{K_{\tilde{d}}}{K_d} \leq \frac{C_2}{C_1} \quad (4.4)$$

entre las constantes triangulares óptimas para cada cuasi-métrica.

¹⁶Por supuesto que (4.3) vale también para los $x \in \bar{E}$ dado que en tal caso $d(x, E) = 0$.

Lema 4.5. *Supongamos que $E \subseteq X$ es un conjunto no vacío y que $d \sim_{C_1, C_2} \tilde{d}$. Entonces, para todo $x \in X$ y $r > 0$ se cumple*

$$C_1 \rho_{d,E}(B_d(x, C_2^{-1}r)) \leq \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, r)) \leq C_2 \rho_{d,E}(B_d(x, C_1^{-1}r)). \quad (4.5)$$

Demostración. Por la simetría del problema en cuestión, basta con demostrar la segunda desigualdad. Dado $x \in X$ y $r > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, r)) &= \sup \Lambda(x, r; \tilde{d}, E) \\ &= \sup \{0 < s \leq 2K_{\tilde{d}}r : \exists y \in X \text{ tal que } B_{\tilde{d}}(y, s) \subseteq B_{\tilde{d}}(x, r) \setminus E\} \\ &\leq \sup \{0 < s \leq 2K_{\tilde{d}}r : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, C_2^{-1}s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\} \\ &= C_2 \sup \{0 < s \leq 2C_2^{-1}K_{\tilde{d}}r : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\} \\ &= C_2 \sup \{0 < s \leq 2K_d(C_2^{-1}K_{\tilde{d}}^{-1}K_{\tilde{d}}r) : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\} \\ &\leq C_2 \sup \{0 < s \leq 2K_d(C_1^{-1}r) : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\} \\ &= C_2 \rho_{d,E}(B_d(x, C_1^{-1}r)), \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se justifica por las inclusiones $B_d(y, C_2^{-1}s) \subseteq B_{\tilde{d}}(y, s)$ y $B_{\tilde{d}}(x, r) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r)$. La tercera igualdad se obtiene reescribiendo el conjunto

$$\{0 < s \leq 2K_{\tilde{d}}r : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, C_2^{-1}s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\}$$

como

$$C_2 \{0 < t \leq 2K_{\tilde{d}}C_2^{-1}r : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, t) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\}.$$

La última desigualdad se sigue del hecho que $2K_d(C_2^{-1}K_{\tilde{d}}^{-1}K_{\tilde{d}}r) \leq 2K_dC_1^{-1}r$ (debido a (4.4)), lo que implica que el conjunto

$$\{0 < s \leq 2K_d(C_2^{-1}K_{\tilde{d}}^{-1}K_{\tilde{d}}r) : \exists y \in X \text{ tal que } B_d(y, s) \subseteq B_d(x, C_1^{-1}r) \setminus E\}$$

está contenido en $\Lambda(x, C_1^{-1}r; d, E)$. ■

Corolario 4.6. *Supongamos que $E \subseteq X$ es un conjunto no vacío y sea $\tilde{d} \sim d$ una cuasi-métrica en X . Entonces, $\rho_{d,E}$ es duplicante si y solo si $\rho_{\tilde{d},E}$ es duplicante.*

Demostración. Supongamos que $d \sim_{C_1, C_2} \tilde{d}$ con $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ y sea $m \geq 1$ el entero definido por las relaciones $2^{m-2} < \frac{C_2}{C_1} \leq 2^{m-1}$. Supongamos ahora que $\rho_{d,E}$ es duplicante y procedamos a verificar la primera implicación. Tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, 2r)) &\leq C_2 \rho_{d,E}(B_d(x, 2C_1^{-1}r)) \\ &\leq C_2 C_{d,E}^m \rho_{d,E}(B_d(x, C_2^{-1}r)) \\ &\leq \frac{C_2}{C_1} C_{d,E}^m \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, r)), \end{aligned}$$

donde fueron utilizadas las dos desigualdades de (4.5), la condición de duplicación y el comportamiento monótono de $\rho_{d,E}(x, \cdot)$ para obtener las estimaciones anteriores. La implicación restante se sigue de forma similar. ■

4.2 Primeras nociones de porosidad

La noción de porosidad en espacios métricos y cuasi-métricos está sujeta a una gran variedad de definiciones y conceptos alternativos. Ver, por ejemplo, el libro [Fal14] o el review [Shm11]. La siguiente definición básica es empleada en [Dyd+19; And+24] y será de utilidad para comparar con la condición de porosidad débil a introducir en la sección siguiente.

Definición 4.7. Sea (X, d) un espacio cuasi-métrico. Un conjunto no vacío $E \subseteq X$ se dice γ -poroso, o simplemente poroso, si existe $\gamma > 0$ tal que para todo $x \in X$ y $r > 0$, es posible hallar un punto $y \in X$ para el cual se cumple¹⁷

$$B_d(y, \gamma r) \subseteq B_d(x, r) \setminus E.$$

Equivalentemente, el conjunto E es γ -poroso si y solo si $\rho_{d,E}(B_d(x, r)) \geq \gamma r$ para todo $x \in X$, $r > 0$.

Un conjunto γ -poroso E tiene la propiedad que su función de poro maximal $\rho_{d,E}$ es estrictamente positiva y, además, cumple con la condición de duplicación puesto que

$$\rho_{d,E}(B_d(x, r)) \geq \gamma r \geq \frac{\gamma}{4K_d} \rho_{d,E}(B_d(x, 2r)).$$

A continuación, presentamos algunas familias de ejemplos de subconjuntos porosos en espacios de tipo homogéneo bajo distintas hipótesis adicionales, comenzando por los subconjuntos puntuales.

Proposición 4.8. Si (X, d) es un espacio cuasi-métrico uniformemente perfecto, entonces el conjunto $E = \{x_0\}$ es poroso para cualquier elección de $x_0 \in X$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de la generalidad que (X, d) es uniformemente perfecto con constante $\eta < (2K_d)^{-1}$. Fijemos un punto $x_0 \in X$, una bola $B = B_d(x, r)$ y comprobemos que existe $\gamma > 0$ tal que $\rho_{d,E}(B) \geq \gamma r$, donde $E := \{x_0\}$. Por supuesto que si $x_0 \notin B$ esto se cumple de forma trivial, por lo que supondremos que $x_0 \in B$. Si $x_0 \in B_d(x, r) \setminus B_d(x, \eta^3 r)$, claramente $\rho_{d,E}(B) \geq \eta^3 r$. Si en cambio tenemos que $x_0 \in B_d(x, \eta^3 r)$, procedemos a elegir $y \in B_d(x, \eta r) \setminus B_d(x, \eta^2 r)$. Luego,

$$d(y, x_0) \geq \frac{1}{K_d} d(x, y) - d(x, x_0) \geq \left(\frac{1}{K_d} - \eta \right) \eta^2 r \geq \frac{\eta^2 r}{2K_d}$$

y, si $w \in X \setminus B$,

$$d(y, w) \geq \frac{1}{K_d} d(x, w) - d(x, y) \geq \left(\frac{1}{K_d} - \eta \right) r \geq \frac{r}{2K_d}.$$

Entonces, $B_d(y, (2K_d)^{-1} \eta^2 r) \subseteq B_d(x, r) \setminus E$ y, por lo tanto, $\rho_{d,E}(B) \geq (2K_d)^{-1} \eta^2 r$. Combinando ambos casos considerados, concluimos que $\rho_{d,E}(B_d(x, r)) \geq \eta^3 r$, por lo que basta con tomar $\gamma := \eta^3$ como constante de porosidad. ■

En [Aim+14], se describen ciertos subconjuntos cerrados $F \subseteq X$, donde (X, d, μ) es un ETH α -Ahlfors, para los cuales existen pesos distancia de la forma $d(\cdot, F)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$ (de hecho, este trabajo fue discutido en la cronología elaborada en la Sección 3.3). Esto no resulta sorprendente teniendo en cuenta que estos subconjuntos son porosos y que, como veremos en las próximas secciones, todos los conjuntos porosos en (X, d) admiten pesos distancia en la clase $A_1(X, d, \mu)$.

¹⁷Notemos que esta definición no depende de la existencia de una medida μ en (X, d) .

Proposición 4.9. Sea (X, d, μ) un $ETH \alpha$ -Ahlfors y supongamos que existen un número $0 < \beta < \alpha$, un subconjunto no vacío $E \subseteq X$ y una medida de Borel ν soportada en E tales que (E, d_*, ν) es un $ETH \beta$ -Ahlfors, donde d_* denota la restricción de d sobre E . Entonces, E es poroso.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que

$$c_1 r^\alpha \leq \mu(B_d(x, r)) \leq c_2 r^\alpha$$

para todo $x \in X$, todo $r > 0$ y ciertas constantes fijas $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, mientras que

$$\tilde{c}_1 r^\beta \leq \nu(B_{d_*}(x, r)) \leq \tilde{c}_2 r^\beta$$

para todo $x \in E$, todo $r > 0$ y constantes fijas $0 < \tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2 < \infty$. Sea ahora $\xi < 1$ a elegir luego y fijemos una bola $B = B_d(x, r)$ que interseca con E . Si tomamos $e \in B \cap E$ arbitrario, tenemos que $B \subseteq B_d(e, 2K_d r)$. Sea $\{e_1, \dots, e_N\}$ un conjunto (ξr) -disperso maximal en $B_{d_*}(e, 2K_d r)$. Se sigue que

$$\bigcup_{i=1}^N B_{d_*}\left(e_i, \frac{\xi r}{2K_d}\right) \subseteq B_{d_*}(e, 4K_d^2 r)$$

y, dado que las d_* -bolas en la unión son disjuntas entre sí,

$$\tilde{c}_2 (4K_d^2 r)^\beta \geq \nu(B_{d_*}(e, 4K_d^2 r)) \geq \sum_{i=1}^N \nu\left(B_{d_*}\left(e_i, \frac{\xi r}{2K_d}\right)\right) \geq N \tilde{c}_1 \left(\frac{\xi r}{2K_d}\right)^\beta.$$

Reemplazando, se deduce que $N \leq \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} \left(\frac{8K_d^3}{\xi}\right)^\beta$. Por otro lado, tenemos que

$$E(\xi r) \cap B \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_d(e_i, 2K_d \xi r)$$

donde $E(\xi r) = \{x \in X : d(x, E) < \xi r\}$ es el (ξr) -entorno de E dentro del espacio cuasi-métrico (X, d) . Luego,

$$\begin{aligned} \mu(E(\xi r) \cap B) &\leq \sum_{i=1}^N \mu(B_d(e_i, 2K_d \xi r)) \leq N c_2 (2K_d \xi r)^\alpha \\ &\leq C(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_2, K_d) \xi^{\alpha-\beta} r^\alpha \\ &\leq C(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, c_1, c_2, K_d) \xi^{\alpha-\beta} \mu(B). \end{aligned}$$

En particular, podemos elegir ξ suficientemente pequeño tal que

$$\frac{\mu(E(\xi r) \cap B_d(x, r))}{\mu(B_d(x, r))} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(2K_d)^\alpha} \frac{c_1}{c_2}$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$. Para esta elección de ξ , consideremos ahora el conjunto

$$D := \{y \in B : d(y, E) \geq \xi r \wedge d(y, X \setminus B) \geq \xi r\}.$$

Observemos que $X \setminus B' \neq \emptyset$ para toda d -bola B' dado que (X, d, μ) es Ahlfors, por lo que el conjunto D está bien definido. Claramente, $D \supset B_d(x, (2K_d)^{-1}r) \setminus E(\xi r)$, por lo que

$$\begin{aligned} \mu(D) &\geq \mu(B_d(x, (2K_d)^{-1}r)) - \mu(E(\xi r) \cap B_d(x, r)) \\ &\geq c_1 \frac{1}{(2K_d)^\alpha} r^\alpha - \frac{1}{2} \frac{1}{(2K_d)^\alpha} \frac{c_1}{c_2} \mu(B_d(x, r)) \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{c_1}{(2K_d)^\alpha} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Luego, $D \neq \emptyset$ y si tomamos $y \in D$, vemos que $B_d(y, \xi r) \subseteq B \setminus E$. Esto, es $\rho_{d,E}(B) \geq \xi r$ y, por lo tanto, E es ξ -poroso. ■

4.3 Porosidad débil en espacios de tipo homogéneo

La siguiente definición es una generalización de la Definición 1.3 y está inspirada en la condición de porosidad débil introducida por Mudarra en espacios métricos con medida duplicante.

Definición 4.10. Diremos que un conjunto no vacío $E \subseteq X$ es (σ, γ) -**débilmente poroso** con respecto a d (o simplemente débilmente poroso) si existen dos constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ tales que para toda bola $B = B_d(x, r)$, existen un natural $N = N(B)$ y una colección finita de bolas $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i=1}^N$ que satisface:

$$4.10.1. \quad B_d(x_i, r_i) \cap B_d(x_j, r_j) = \emptyset \text{ para } i \neq j \text{ y } B_d(x_i, r_i) \subseteq B \setminus E \text{ para todo } 1 \leq i \leq N;$$

$$4.10.2. \quad r_i \geq \gamma \rho_{d,E}(B) \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$4.10.3. \quad r_i \leq 2K_d r \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$4.10.4. \quad \sum_{i=1}^N \mu(B_d(x_i, r_i)) \geq \sigma \mu(B).$$

Observaciones. (1) Si consideramos el ETH $(\mathbb{R}^n, d, m)$, donde $d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ y m denota a la medida de Lebesgue, entonces $B_d(x, r) = Q(x, r)^\circ = \prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$ para todo par $(x, r) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Además, si $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r) \setminus E$, existe $Q' \in \mathcal{D}(Q(x, r))$ tal que $Q' \subseteq B_d(y, s)$ y $l(Q') \geq \frac{1}{2}s$. No es difícil comprobar que, a partir de estas observaciones y el hecho que los subconjuntos débilmente porosos de $(\mathbb{R}^n, d, m)$ coinciden con los del espacio euclídeo con la métrica usual, la Definición 4.10 en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la considerada en el Capítulo 1.

(2) Si bien la condición de porosidad débil depende de la existencia de una medida μ , a diferencia de la condición de porosidad a secas, la propiedad de duplicación (2.6) implica que para todo conjunto γ -poroso, existe $\sigma = \sigma(c_{\mu,d}) \in (0, 1)$ tal que E es $(\sigma, \widehat{\gamma})$ -débilmente poroso para todo $\widehat{\gamma} \in (0, 1)$. En particular, esto justifica la nomenclatura elegida en [And+24].

(3) Si E es débilmente poroso, entonces no puede contener átomos. Para ver esto, supongamos que $x_0 \in E$ es un átomo. Luego, por 2.30.3, se sigue que x_0 es aislado, por lo que podemos encontrar $r > 0$ tal que $B_d(x_0, r) = \{x_0\}$. Esto es, $B_d(x_0, r) \setminus E = \emptyset$ y no es posible hallar ninguna colección de d -bolas que cumpla con las propiedades 4.10.1-4.10.4, por lo tanto E no puede contener ningún átomo.

De ahora en más, denotamos por $DP(X, d, \mu)$ a la colección de todos los subconjuntos E de X para los cuales existen constantes $0 < \sigma, \gamma < 1$ tales que E es (σ, γ) -débilmente poroso. Por la observación previa, los conjuntos introducidos en la Sección 4.2 pertenecen a esta familia, incluyendo a los fractales autosimilares gracias a la Proposición 4.9.

El primer ejemplo de conjuntos débilmente porosos presentado por Anderson *et al.* en el contexto de $\mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{Z}$. El siguiente resultado muestra que, de hecho, todo subconjunto ε -disperso maximal en un ETH uniformemente perfecto es débilmente poroso, lo que en particular abarca al caso de $\mathbb{Z}$ visto como subconjunto de la recta.

Proposición 4.11. Si (X, d, μ) es uniformemente perfecto y $E = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq X$ es un subconjunto ε -disperso maximal para cierto $\varepsilon > 0$, entonces E es débilmente poroso y $\rho_{d,E}(\cdot)$ es duplicante.

Demostración. Como antes, supongamos que (X, d, μ) es uniformemente perfecto con constante $\eta < (2K_d)^{-1}$ y sea $E = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un conjunto ε -disperso maximal en X . Si $B = B_d(x, r)$ es una bola arbitraria, dado que $d(y, E) \leq \varepsilon$ para todo $y \in X$, se tiene que $\rho_{d,E}(B) \leq \min\{\varepsilon, 2K_d r\}$. Afirmamos a continuación que existe una cota similar por debajo para la función $\rho_{d,E}$. Más precisamente, existe una constante $0 < c < 1$ (que depende de K_d y η) tal que

$$\rho_{d,E}(B) \geq c \min\{\varepsilon, r\}. \quad (4.6)$$

Para verificar (4.6), comencemos por considerar el caso en que $r \geq 4K_d^2\varepsilon$. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_i) < \varepsilon$. Por hipótesis, tenemos que $B_d(x_i, \varepsilon) \subseteq B$. Luego, si elegimos $y \in B_d(x_i, \eta\varepsilon) \setminus B_d(x_i, \eta^2\varepsilon)$, la desigualdad triangular implica que $B_d(y, (2K_d)^{-1}\eta^2\varepsilon) \subseteq B_d(x_i, \varepsilon) \setminus \{x_i\}$. Esto es, $\rho_{d,E}(B) \geq (2K_d)^{-1}\eta^2\varepsilon$. Supongamos ahora que $r < 4K_d^2\varepsilon$. Si $B_d(x, \eta^3r) \cap E = \emptyset$, entonces $\rho_{d,E}(B) \geq \eta^3r$. Si en vez tenemos que $x_i \in B_d(x, \eta^3r)$ para cierto $i \in \mathbb{N}$, notemos que la d -bola $B_d(x_i, (2K_d)^{-2}r)$ está contenida en B y no contiene ningún otro punto de E aparte de x_i dado que E es ε -disperso y $(2K_d)^{-2}r < \varepsilon$. Luego, si fijamos $y \in B_d(x_i, (4K_d^2)^{-1}\eta r) \setminus B_d(x_i, (4K_d^2)^{-1}\eta^2r)$, se deduce a través de la desigualdad triangular que $B_d(y, (2K_d)^{-2}\eta^2r) \subseteq B_d(x_i, (2K_d)^{-2}r) \setminus \{x_i\} = B_d(x_i, (2K_d)^{-2}r) \setminus E$. Es decir, tenemos que $\rho_{d,E}(B) \geq (2K_d)^{-2}\eta^2r$. Combinando las estimaciones anteriores, obtenemos

$$\rho_{d,E}(B) \geq \frac{\eta^3}{4K_d^2} \min\{\varepsilon, r\}$$

para toda bola $B = B_d(x, r)$ en X , de lo que se deduce fácilmente la duplicación de $\rho_{d,E}$ de la siguiente forma

$$\rho_{d,E}(2B) \leq \min\{\varepsilon, 4K_d^2r\} \leq \frac{16K_d^3}{\eta^3} \left(\frac{\eta^3}{4K_d^2} \min\{\varepsilon, r\} \right) \leq \frac{16K_d^3}{\eta^3} \rho_{d,E}(B).$$

Veamos ahora que, dada una bola $B = B_d(x, r)$, existen parámetros $0 < \sigma, \gamma < 1$ tales que se satisface la condición de porosidad débil de E en B . A este fin, consideramos dos casos de forma separada. Las estrategias utilizadas en cada uno de ellos se ven esquematizadas en la [Figura 4.1](#).

Caso I ($r < 4K_d^2\varepsilon$): dado que $\rho_{d,E}(B) \geq (2K_d)^{-2}\eta^3r$, existe $y \in B$ tal que $B_d(y, \frac{1}{2}(2K_d)^{-2}\eta^3r) \subseteq B \setminus E$. Luego, la colección $\{B_1\}$ con $B_1 := B_d(y, r_1)$ y $r_1 := \frac{1}{2}(2K_d)^{-2}\eta^3r$ satisface los requerimientos de la [Definición 4.10](#) para todo $0 < \gamma < \frac{1}{2}(\frac{\eta}{2K_d})^3$ y $0 < \sigma \leq c_{\mu,d}^{-m}$ donde el entero m cumple $2^m \geq 16(\frac{K_d}{\eta})^3 > 2^{m-1}$, puesto que

$$r > r_1 = \frac{1}{2} \frac{\eta^3r}{(2K_d)^2} \geq 2K_d\gamma r \geq \gamma\rho_{d,E}(B)$$

y

$$\mu(B_1) \geq c_{\mu,d}^{-m} \mu(B_d(y, 2K_d r)) \geq c_{\mu,d}^{-m} \mu(B).$$

Caso II ($r \geq 4K_d^2\varepsilon$): sean $s_1 := (2K_d)^{-2}r$ y $s_2 := (2K_d)^{-1}r$. Claramente, $B_d(x, s_1) \subseteq B_d(x, s_2) \subseteq B$ y $B_d(x, s_2) \cap E \neq \emptyset$, puesto que $s_2 \geq \varepsilon$ y E es ε -disperso maximal. De hecho, valen las inclusiones

$$B_d(x, s_1) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}: x_i \in B_d(x, s_2)} B_d(x_i, \varepsilon) \subseteq B.$$

En efecto, si $z \in B_d(x, s_1)$, debe existir algún punto $x_i \in E$ tal que $d(z, x_i) < \varepsilon$. Pero entonces

$$d(x_i, x) \leq K_d[d(x_i, z) + d(z, x)] < K_d\varepsilon + \frac{1}{4K_d}r \leq s_2,$$

es decir, $x_i \in B_d(x, s_2)$ y vale la primera inclusión buscada. Si ahora tomamos $w \in B_d(x_i, \varepsilon)$ con $x_i \in B_d(x, s_2)$, vemos que

$$d(w, x) \leq K_d[d(w, x_i) + d(x_i, x)] < K_d\varepsilon + \frac{1}{2}r < r.$$

Sean $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ los elementos de la intersección $B_d(x, s_2) \cap E$. Definimos $\tilde{B}_j := B_d(x_{i_j}, (2K_d)^{-1}\varepsilon)$ para $1 \leq j \leq k$. Luego, la colección $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_k\}$ es disjunta de dos en dos y cada d -bola en la colección está contenida en $B \setminus E$. Para cada $1 \leq j \leq k$, elegimos $y_j \in \eta\tilde{B}_j \setminus \eta^2\tilde{B}_j$ e introducimos las (sub)bolas $B_j := B_d(y_j, r_j)$ con $r_j := (2K_d)^{-1}\eta^2\varepsilon$. Se sigue que $\{B_1, \dots, B_k\}$ es una colección de d -bolas disjuntas de dos en dos y contenidas en $B \setminus E$ (puesto que $B_j \subseteq \tilde{B}_j \setminus \{x_{i_j}\}$). Además,

$$\gamma\rho_{d,E}(B) \leq \gamma \min\{\varepsilon, 2K_d r\} = \gamma\varepsilon \leq r_j \leq 2K_d r$$

para todo $\gamma < (2K_d)^{-1}\eta^2$ y

$$\sum_{j=1}^k \mu(B_j) \geq c_{\mu,d}^{-m} \sum_{j=1}^k \mu(B_d(y_j, \varepsilon)) \geq c_{\mu,d}^{-m} \mu(B_d(x, s_1)) \geq c_{\mu,d}^{-m-k} \mu(B)$$

donde $2^m \geq \frac{2K_d}{\eta^2} > 2^{m-1}$ y $2^k \geq 4K_d^2 > 2^{k-1}$. Por lo tanto, se satisface la condición de porosidad débil con parámetros $\gamma < (2K_d)^{-1}\eta^2$ y $\sigma < c_{\mu,d}^{-m-k}$. ■

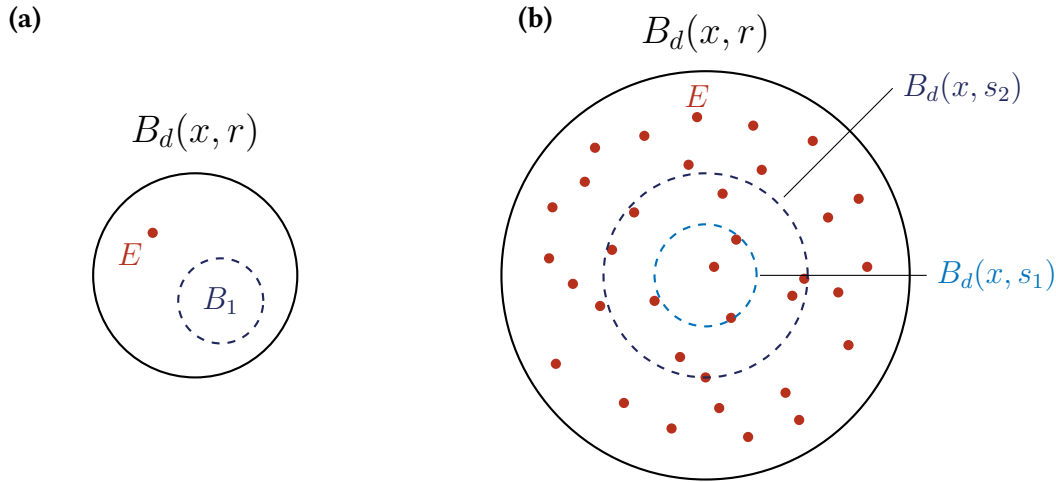


Figura 4.1: Cuando r es pequeño (a), es suficiente con considerar una única bola $B_1 \subseteq B_d(x, r) \setminus E$ de radio comparable a r para probar la condición de porosidad débil, siendo que la existencia de B_1 está garantizada por (4.6). Cuando el radio r es grande (b), la estrategia consiste en considerar las bolas interiores $B_d(x, s_1) \subseteq B_d(x, s_2) \subseteq B_d(x, r)$. Para valores apropiados de s_1 y s_2 , podemos utilizar los puntos de E contenidos en $B_d(x, s_2)$ como centros de bolas para formar un cubrimiento de $B_d(x, s_1)$ y, utilizando reiteradas veces la hipótesis que (X, d, μ) es uniformemente perfecto, se demuestra que alrededor de cada uno de estos puntos es posible hallar un poro de tamaño proporcional a la constante de dispersión ε y cuya medida es proporcional a la medida de $B_d(x, s_1)$, siendo que $\mu(B_d(x, s_1)) \gtrsim \mu(B_d(x, r))$.

Es claro que cualquier subconjunto de un conjunto γ -poroso es poroso, posiblemente con una constante aún mayor que γ . En cierto modo, remover puntos de un conjunto lo hace “más poroso”. Sin embargo, en el caso de la porosidad débil, en [And+24] se demostró que $\mathbb{N}$ no es débilmente

poroso a pesar de estar contenido en $\mathbb{Z}$, para lo cual se valieron de un argumento ingenioso que consistió en demostrar que el poro maximal diádico asociado a $\mathbb{N}$ no cumple con (1.3). El hecho que la condición de porosidad débil no sea preservada por subconjuntos tiene un motivo difícil de apreciar a simple vista: lo cierto es que la condición de porosidad débil conlleva un equilibrio global en la distribución de los poros del conjunto, equilibrio que puede de alguna forma perderse al remover suficientes puntos del conjunto en cuestión. En particular, en espacios uniformemente perfectos los subconjuntos ε -dispersos no son en general débilmente porosos, salvo cuando son maximales.

Si bien la operación de tomar subconjuntos de un conjunto $E \in \text{DP}(X, d, \mu)$ no garantiza que se preserve la porosidad débil, veremos más adelante que $\text{DP}(X, d, \mu)$ sí es cerrado con respecto a uniones finitas, lo que en principio podría ser utilizado para construir nuevos ejemplos de conjuntos débilmente porosos a partir de los presentados hasta el momento. Por ejemplo, uniones finitas de puntos en espacios uniformes o conjuntos obtenidos como uniones de fractales autosimilares en espacios de tipo Ahlfors.

El siguiente objetivo que nos proponemos es verificar que la Definición 4.10 es invariante ante cambios de cuasi-métricas equivalentes, aunque con una salvedad importante a tener en cuenta. Dado que la porosidad débil involucra la medida μ , es necesario poder garantizar la medibilidad de las bolas de la nueva cuasi-métrica. Por este motivo, es conveniente trabajar con la clase de equivalencia reducida

$$\mathcal{D}^*(X, d) := \{d' \in \mathcal{D}(X) : d' \sim d \wedge \text{las } d'\text{-bolas son abiertas}\}. \quad (4.7)$$

Como se comentó en la Sección 2.4, si $d' \in \mathcal{D}^*(X, d)$, entonces (X, d', μ) es un nuevo ETH que admite una constante de duplicación $c_{\mu, d'}$ dependiente de $c_{\mu, d}$ y de las constantes de equivalencia entre d y d' .

Lema 4.12. *Sean $E \subseteq X$ un conjunto no vacío y $\tilde{d} \in \mathcal{D}^*(X, d)$ otra cuasi-métrica con $d \sim_{C_1, C_2} \tilde{d}$. Entonces, E es un conjunto débilmente poroso con respecto a d y $\rho_{d, E}$ es duplicante si y sólo si E es débilmente poroso con respecto a $\tilde{d}$ y $\rho_{\tilde{d}, E}$ es duplicante.*

Demostración. Al igual que en demostraciones de equivalencias anteriores, basta comprobar una de las implicaciones, por lo que supongamos que E es (σ, γ) -débilmente poroso con respecto a la cuasi-métrica d y que $\rho_{d, E}$ es duplicante. Sabemos, por el Corolario 4.6, que $\rho_{\tilde{d}, E}$ es duplicante, por lo que tan solo resta hallar constantes σ_0 y γ_0 tales que E es (σ_0, γ_0) -débilmente poroso con respecto a $\tilde{d}$. Sea $B_{\tilde{d}}(x, r)$ una bola arbitraria en X para la cuasi-métrica $\tilde{d}$. Por la hipótesis de equivalencia, se tienen las inclusiones

$$B_d\left(x, \frac{r}{C_2}\right) \subseteq B_{\tilde{d}}(x, r) \subseteq B_d\left(x, \frac{r}{C_1}\right).$$

Ahora bien, dado que E es débilmente poroso con respecto a d , existe una colección finita de d -bolas $\{B_d(z_i, r_i)\}_{i=1}^N$, cada una contenida en $B_d(x, \frac{r}{C_2})$, tales que $B_d(z_i, r_i) \cap B_d(z_j, r_j) = \emptyset$ y $B_d(z_i, r_i) \subseteq B_d(x, \frac{r}{C_2}) \setminus E$; además $r_i \geq \gamma \rho_{d, E}(B_d(x, \frac{r}{C_2}))$; $r_i \leq 2K_d \frac{r}{C_2}$ y

$$\sum_{i=1}^N \mu(B_d(z_i, r_i)) \geq \sigma \mu\left(B_d\left(x, \frac{r}{C_2}\right)\right).$$

Si denotamos $\tilde{r}_i := C_1 r_i$, entonces, para cada $1 \leq i \leq N$ se cumple $B_{\tilde{d}}(z_i, \tilde{r}_i) \subseteq B_d(z_i, r_i)$. Verifiquemos que la colección de $\tilde{d}$ -bolas $\{B_{\tilde{d}}(z_i, \tilde{r}_i)\}_{i=1}^N$ satisface las cuatro condiciones de la Definición 4.10 para la bola $B_{\tilde{d}}(x, r)$ con respecto a la cuasi-métrica $\tilde{d}$.

(4.10.1) Tenemos que

$$B_{\tilde{d}}(z_i, \tilde{r}_i) \cap B_{\tilde{d}}(z_j, \tilde{r}_j) \subseteq B_d(z_i, r_i) \cap B_d(z_j, r_j) = \emptyset$$

y

$$B_{\tilde{d}}(z_i, \tilde{r}_i) \subseteq B_d(z_i, r_i) \subseteq B_d\left(x, \frac{r}{C_2}\right) \setminus E \subseteq B_{\tilde{d}}(x, r) \setminus E.$$

(4.10.2) Como $\tilde{r}_i = C_1 r_i$, si tomamos $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $2^{m-1} < \frac{C_2}{C_1} \leq 2^m$, obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i &\geq C_1 \gamma \rho_{d,E}\left(B_d\left(x, \frac{r}{C_2}\right)\right) \geq \frac{C_1 \gamma}{C_{d,E}^m} \rho_{d,E}\left(B_d\left(x, \frac{r}{C_1}\right)\right) \\ &\geq \frac{C_1 \gamma}{C_2 C_{d,E}^m} \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, r)), \end{aligned}$$

por lo que $\tilde{r}_i \geq \gamma_0 \rho_{\tilde{d},E}(B_{\tilde{d}}(x, r))$ con $\gamma_0 := \frac{C_1 \gamma}{C_2 C_{d,E}^m} \in (0, 1)$.

(4.10.3) Recordando que $\frac{K_d}{K_{\tilde{d}}} \leq \frac{C_2}{C_1}$, vemos que

$$\tilde{r}_i \leq 2C_1 K_d \frac{r}{C_2} = 2\left(\frac{K_d}{K_{\tilde{d}}}\right) \frac{C_1}{C_2} K_{\tilde{d}} r \leq 2K_{\tilde{d}} r.$$

(4.10.4) Finalmente, con m como en la prueba de la propiedad 4.10.2,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu(B_{\tilde{d}}(z_i, \tilde{r}_i)) &\geq \frac{1}{c_{\mu, \tilde{d}}^m} \sum_{i=1}^N \mu(B_{\tilde{d}}(z_i, C_2 r_i)) \\ &\geq \frac{1}{c_{\mu, \tilde{d}}^m} \sum_{i=1}^N \mu(B_d(z_i, r_i)) \\ &\geq \frac{\sigma}{c_{\mu, \tilde{d}}^m} \mu\left(B_d\left(x, \frac{r}{C_2}\right)\right) \\ &\geq \frac{\sigma}{c_{\mu, \tilde{d}}^m c_{\mu, d}^m} \mu\left(B_d\left(x, \frac{r}{C_1}\right)\right) \\ &\geq \frac{\sigma}{(c_{\mu, \tilde{d}} c_{\mu, d})^m} \mu(B_{\tilde{d}}(x, r)) \\ &=: \sigma_0 \mu(B_{\tilde{d}}(x, r)), \end{aligned}$$

donde claramente $\sigma_0 \in (0, 1)$.

Por lo tanto, E es (σ_0, γ_0) -débilmente poroso con respecto a $\tilde{d}$. ■

Por supuesto que, en el caso que d y $\tilde{d}$ no sean equivalentes, un conjunto débilmente poroso con respecto a d no tiene por qué serlo con respecto a $\tilde{d}$. El siguiente es un ejemplo donde se da esta situación.

Ejemplo 4.13. Sean d la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ y m la medida de Lebesgue en dos dimensiones. Denotamos por d_p a la **métrica parabólica** en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$d_p(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \sqrt{|x_2 - y_2|}\}.$$

Es fácil ver que $(\mathbb{R}^2, d_p, m)$ es, al igual que $(\mathbb{R}^2, d, m)$, un espacio de tipo homogéneo. De hecho, una bola $B_{d_p}(x, r)$ no es más que el interior de un rectángulo R con lados $l_1(R) = 2r$

y $l_2(R) = \frac{1}{2}l_1(R)^2 = 2r^2$, donde l_1 y l_2 denotan la longitud de lado en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Luego, $m(B_{d_p}(x, r)) = 4r^3$, por lo que $(\mathbb{R}^2, d_p, m)$ es 3-Ahlfors. Las métricas d y d_p no son equivalentes entre sí: basta considerar la sucesión de puntos $x_n = (0, n)$ y verificar que $d(0, x_n) = n$ mientras que $d_p(0, x_n) = \sqrt{n}$, por lo tanto d y d_p no son comparables.

Consideremos ahora el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ construido de la siguiente forma. Sea E_0 el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$ en $\mathbb{R}^2$. Denotamos por $Q_1, \dots, Q_9$ a los 9 cuadrados cerrados de lado $\frac{1}{3}$ contenidos en E_0 y numerados desde arriba hacia abajo y de izquierda a derecha (ver Figura 4.2). A continuación, definimos $E_1 := E_0 \setminus Q_5^\circ$, esto es, E_1 se obtiene como E_0 menos el subcuadrado central Q_5 . Procediendo de forma inductiva, para $k \geq 2$, supongamos que tenemos 9^{k-1} cuadrados de lado $\frac{1}{3^{k-1}}$ denotados como Q_α , donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}^{k-1}$. A continuación, para cada uno de estos índices α definimos $Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 1)}, \dots, Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 9)}$ como los 9 subcuadrados de lado $\frac{1}{3^k}$ contenidos en Q_α y numerados desde arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Entonces, el conjunto E_k queda definido según

$$E_k := \bigcup_{\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}^{k-1}} Q_\alpha \setminus Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5)}^\circ.$$

Finalmente, definimos $E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} E_k$, conjunto conocido como la *alfombra de Sierpinski*. El conjunto E es poroso con respecto a la métrica euclídea d , lo cual se puede probar directamente por definición. Esto en particular lo hace débilmente poroso con respecto a d . Veamos sin embargo que E no es débilmente poroso con respecto a d_p para ninguna elección de parámetros $0 < \sigma, \gamma < 1$. Para probar esto, vamos a suponer los siguientes dos resultados. En primer lugar, si B_p es una d_p -bola con la propiedad que $B_p \subseteq E_0 \setminus E$, entonces necesariamente B_p está contenida en alguno de los cuadrados $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}$ que fueron sustraídos para obtener E_k , para algún $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}^{k-1}$. Esto se sigue del hecho que los bordes de cada uno de estos cubos usados en el procedimiento de construcción pertenecen al conjunto E . Por otro lado, si denotamos por L al lado superior de E_0 (el segmento de recta que conecta $(0, 1)$ con $(1, 1)$), entonces

$$d(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}, L) \geq \frac{1}{3^k}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $B_k = B_{d_p}(x_k, r_k)$ la bola parabólica con centro

$$z_k = \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{2k}} \sum_{m=1}^k \frac{1}{2^{m+1}} \right)$$

y radio

$$r_k = \frac{1}{2 \cdot 3^k}.$$

Si R_k es el rectángulo $\bar{B}_k$, entonces se sigue que $l_1(R_k) = \frac{1}{3^k}$ y $l_2(R_k) = \frac{1}{2 \cdot 3^{2k}}$. Las bolas B_k se hallan sobre el borde superior de E_0 , intersectando tanto con este conjunto como con su complemento. A medida que k aumenta, la proporción de B_k que yace afuera de E_0 disminuye, dado que la altura del centro z_k es

$$1 - \frac{l_2(R_k)}{2} \sum_{m=1}^k \frac{1}{2^m},$$

situación esquematizada en la Figura 4.3.

Si R_* es un **rectángulo parabólico** (en el sentido que coincide con la clausura de una d_p -bola) contenido en $R_k \setminus E_0$, entonces el área máxima de R_* está limitada por la longitud de su lado en la segunda coordenada del espacio. Luego, si suponemos que R_* posee el mayor valor de área posible, entonces $l_2(R_*) = \frac{1}{2^{k+2} \cdot 3^{2k}}$ (que es la “altura” del rectángulo $R_k \setminus E_0$), con lo cual

$$l_1(R_*) = \sqrt{2l_2(R_*)} = \frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}} \cdot 3^k}$$

Por otro lado, si R_{**} es un rectángulo parabólico contenido en $(R_k \cap E_0) \setminus E$, entonces R_{**} debe estar contenido en cierto cuadrado $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}$. Dicho cuadrado debe cumplir $d(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}, L) \geq \frac{1}{3^n}$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, pero como R_{**} está contenido en R_k , la distancia (euclídea) de $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}$ a L debe ser menos que $l_2(R_k)$. Esto es,

$$l_1(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}) = \frac{1}{3^n} \leq d(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}, L) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{2k}}.$$

Luego, tenemos que $l_1(R_{**}) \leq l_1(Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 5}) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{2k}}$. Pero entonces

$$\frac{l_1(R_*)}{l_1(R_{**})} = \frac{3^k}{2^{\frac{k-1}{2}}} \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Si $0 < \sigma, \gamma < 1$, elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|B_k \setminus E_0| < \sigma|B_k|$. Observemos que

$$\rho_{d_p, E}(B_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}} \cdot 3^k},$$

que es exactamente la mitad del lado $l_1(R_*)$ del mayor rectángulo parabólico R_* contenido en $R_k \setminus E_0$. Si ahora tomamos $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3^k}{2^{\frac{k-1}{2}}} < \gamma$, entonces para $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ no existe ninguna bola $B_{d_p}(x, r) \subseteq B_k \cap E_0$ que cumpla $r \geq \gamma \rho_{d_p, E}(B_k)$, por lo que para satisfacer la Definición 4.10 sólo es posible tomar una colección de bolas $B_{d_p}(x_i, r_i) \subseteq B_k \setminus E_0$. Pero entonces

$$\sum_i |B_{d_p}(x_i, r_i)| \leq |B_k \setminus E_0| < \sigma|B_k|.$$

Luego, E no es (σ, γ) -débilmente poroso con respecto a d_p para ninguna elección de parámetros $0 < \sigma, \gamma < 1$.

Si bien todo conjunto poroso E cumple de forma inmediata la propiedad de duplicación de su función $\rho_{d, E}$ asociada, este no es el caso de los conjuntos débilmente porosos. Ciertamente, Mudarra construyó un ejemplo en donde esto no sucede en el caso métrico [Mud25]. Este ejemplo consta del conjunto $E := \mathbb{N}_0 \times \{0\}$ visto como subconjunto en el espacio métrico (X, d, μ) formado por

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\},$$

la métrica del máximo $d(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ y la 1-medida exterior de Hausdorff en el plano $\mu = \mathcal{H}^1$. Mudarra demostró que, si bien el conjunto E es débilmente poroso en este contexto, la función $\rho_{d, E}$ no cumple con la condición de duplicación en bolas próximas al origen.

En este mismo trabajo, se describe además una condición sobre un espacio métrico con medida duplicante (X, d, μ) que permite asegurar que la función de poro maximal asociada a cualquier subconjunto débilmente poroso de X es automáticamente duplicante. A saber, la condición de

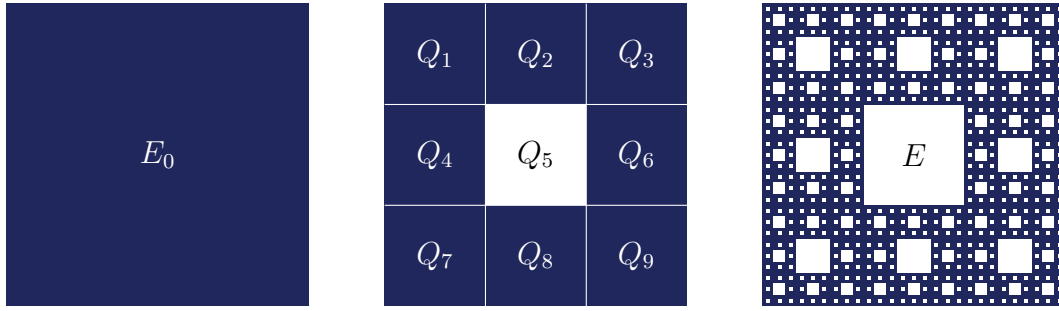


Figura 4.2: El cuadrado E_0 es particionado en los 9 subcuadrados de idéntico tamaño $Q_1, \dots, Q_9$, de los cuales el interior del cuadrado central Q_5 es removido para dar lugar al conjunto E_1 . El resultado de aplicar este procedimiento de forma inductiva sobre los cuadrados Q_α es el conjunto E esquematizado a derecha.

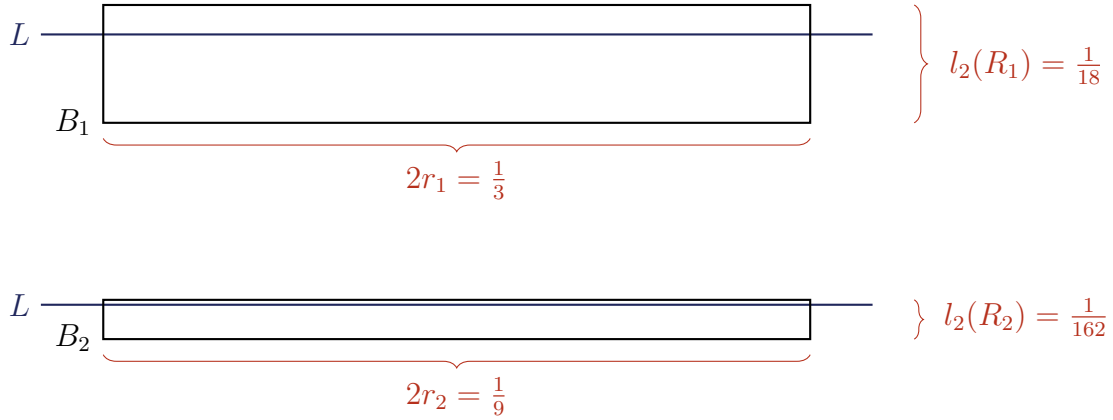


Figura 4.3: Las dos primeras d_p -bolas de la sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y su intersección con el borde superior L del cuadrado E_0 . En la figura se aprecia no solo cómo el área de cada bola en la sucesión disminuye notablemente con k , sino cómo aumenta la relación $l_1(R_k)/l_2(R_k)$ y cómo disminuye la proporción de la bola B_k que está contenida en el complemento de E_0 .

Mudarra consiste en que para todo $\varepsilon > 0$, sea posible encontrar algún $\eta \in (0, 1)$ tal que

$$\sup_{x \in X, (1-\eta) \leq \frac{t}{s} \leq 1} \frac{\mu(B_{\partial}(x, s) \setminus B_{\partial}(x, t))}{\mu(B_{\partial}(x, s))} < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Desafortunadamente, el hecho que la propiedad de decaimiento sobre la medida de los ∂ -anillos dada por (4.8) no parece ser suficiente, o al menos la demostración no es inmediatamente adaptable, en el caso que ∂ sea una cuasi-métrica. Sí es posible adaptar el argumento de Mudarra al caso de una cuasi-métrica d que resulta ser equivalente a ∂^β , donde ∂ es métrica en X que cumple (4.8) y $\beta > 0$. Dado que no toda cuasi-métrica en X puede hallarse equivalente a la potencia de una métrica con estas características, en general será necesario suponer la duplicación de $\rho_{d,E}$ como una hipótesis adicional e independiente a la condición de porosidad débil de E en algunos de los resultados de las próximas secciones.

4.4 La condición A_1 del peso implica porosidad débil

En las siguientes páginas nos dedicamos a demostrar que la condición A_1 de un peso distancia implica la porosidad débil del conjunto asociado. En términos de las familias de conjuntos definidas anteriormente, demostramos la contención

$$\Sigma_1(X, d, \mu) \subseteq \text{DP}(X, d, \mu).$$

La prueba de esta primera implicación se basa en argumentos elementales y donde no es necesario recurrir, por ejemplo, a lemas de cubrimiento o cambios de cuasi-métricas especiales.

Teorema 4.14. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las d -bolas forman una base de la topología. Sea E un subconjunto no vacío de X . Si existe algún $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$, entonces E es débilmente poroso.*

Demostración. Sea $B = B_d(y, r)$ una bola en X . Dado que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$, tenemos que $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ es localmente integrable y, en particular, es integrable sobre B . Entonces

$$0 = \mu(\{x \in B : d(x, E)^{-\alpha} = \infty\}) = \mu(\{x \in B : d(x, E) = 0\}) = \mu(B \cap \bar{E}).$$

Por lo tanto, $\mu(\bar{E}) = 0$ y la función $\rho_{d,E}(B) > 0$ es estrictamente positiva. Sean ahora $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ a elegir luego y consideremos el conjunto

$$D_\gamma = \{x \in B : d(x, E) \geq \gamma \rho_{d,E}(B) \wedge d(x, X \setminus B) \geq \gamma \rho_{d,E}(B)\},$$

donde suponemos $d(x, X \setminus B) = \infty$ en el caso $X \setminus B = \emptyset$. Como $\rho_{d,E}(B) > 0$ y $\gamma < 1$, por la Definición 4.1, claramente tenemos que $D_\gamma \neq \emptyset$.

A continuación, buscamos dar con una cota inferior para la medida de D_γ de la forma $\mu(D_\gamma) \gtrsim \mu(B)$. Si $D_\gamma \supset B_d(y, (2K_d)^{-1}r)$, entonces simplemente podemos estimar

$$\mu(D_\gamma) \geq \mu(B_d(y, (2K_d)^{-1}r)) \geq c_{\mu,d}^{-m} \mu(B_d(y, r)) \quad (4.9)$$

donde m es el entero que satisface $2^m \geq 2K_d > 2^{m-1}$. Si en cambio tenemos que $B_d(y, (2K_d)^{-1}r) \setminus D_\gamma \neq \emptyset$, la obtención de la cota requerida es algo más compleja y será necesario recurrir a la condición A_1 del peso distancia. Afirmamos en primer lugar que todos los puntos en esta resta se encuentran a una distancia estrictamente menor que $\gamma \rho_{d,E}(B)$ del conjunto E . Para ver esto, escribimos

$$B_d\left(y, \frac{r}{2K_d}\right) \setminus D_\gamma = C_1 \cup C_2$$

donde $C_1 = B_d\left(y, \frac{r}{2K_d}\right) \cap \{d(x, E) < \gamma \rho_{d,E}(B)\}$ y $C_2 = B_d\left(y, \frac{r}{2K_d}\right) \cap \{d(x, X \setminus B) < \gamma \rho_{d,E}(B)\}$. Para probar la afirmación, es suficiente constatar que $C_2 = \emptyset$. Si $X \setminus B = \emptyset$, esto es inmediato. Supongamos entonces que $X \setminus B \neq \emptyset$ y tomemos $w \in B_d(y, 2^{-1}K_d^{-1}r)$ y $\xi \in X \setminus B$. Luego,

$$K_d d(w, \xi) \geq d(y, \xi) - K_d d(y, w) \geq r - K_d d(y, w),$$

y, por lo tanto,

$$d(w, \xi) \geq \frac{1}{K_d} r - d(y, w) \geq \frac{1}{K_d} r - \frac{1}{2K_d} r = \frac{r}{2K_d},$$

lo que implica $d(w, X \setminus B) \geq 2^{-1}K_d^{-1}r$. Finalmente, obtenemos

$$C_2 \subseteq \left\{d(x, X \setminus B) \geq \frac{r}{2K_d}\right\} \cap \{d(x, X \setminus B) < \gamma \rho_{d,E}(B)\} = \emptyset$$

dado que $\gamma < \frac{1}{4K_d^2}$ implica $\gamma\rho_{d,E}(B) \leq 2\gamma K_d r < \frac{r}{2K_d}$. Ahora bien, partiendo del valor medio de la función $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ en B podemos estimar

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu(B)} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\geq \frac{1}{\mu(B)} \int_{B_d(y, \frac{r}{2K_d})} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\
 &\geq \frac{1}{\mu(B)} \int_{B_d(y, \frac{r}{2K_d}) \setminus D_\gamma} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\
 &\geq \frac{\mu(B_d(y, 2^{-1}K_d^{-1}r) \setminus D_\gamma)}{\mu(B)} \gamma^{-\alpha} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \\
 &\geq \left(\frac{\mu(B_d(y, 2^{-1}K_d^{-1}r)) - \mu(D_\gamma)}{\mu(B)} \right) \gamma^{-\alpha} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \\
 &\geq \left(\frac{c_{\mu,d}^{-k} \mu(B) - \mu(D_\gamma)}{\mu(B)} \right) \gamma^{-\alpha} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha}, \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

donde $k \geq 1$ es tal que $2^{k-1} < 2K_d \leq 2^k$.

Por otro lado, recordando que $\rho_{d,E}(B)$ es estrictamente positivo, podemos elegir $z \in B$ y $t > \frac{1}{2}\rho_{d,E}(B)$ tales que $B_d(z, t) \subseteq B \setminus E$ y, consecuentemente,

$$\mu\left(\left\{x \in B : d(x, E) \geq \frac{1}{4K_d} \rho_{d,E}(B)\right\}\right) \geq \mu\left(B\left(z, \frac{1}{2K_d}t\right)\right) > 0.$$

En particular, esto significa que $\text{ess inf}_B d(\cdot, E)^{-\alpha} \leq 4^\alpha K_d^\alpha \rho_{d,E}(B)^{-\alpha}$, lo que combinado con la hipótesis $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$ permite entonces estimar

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu(B)} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\leq [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X, d, \mu)} \text{ess inf}_{x \in B} d(x, E)^{-\alpha} \\
 &\leq 4^\alpha K_d^\alpha [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X, d, \mu)} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \\
 &=: C(\alpha, K_d, [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X, d, \mu)}) \rho_{d,E}(B)^{-\alpha}. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Combinando (4.10) y (4.11) y despejando, obtenemos

$$\mu(D_\gamma) \geq (c_{\mu,d}^{-k} - C(\alpha, K_d, [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X, d, \mu)}) \gamma^\alpha) \mu(B). \tag{4.12}$$

Luego, por (4.9) y (4.12) y eligiendo $\gamma > 0$ suficientemente pequeño, podemos asegurar que

$$\mu(D_\gamma) \geq C \mu(B) \tag{4.13}$$

para cierta constante $C = C(\alpha, K_d, c_{\mu,d}, [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X, d, \mu)}) \in (0, 1)$. Veamos que podemos usar (4.13) para demostrar que existe una colección finita de bolas que cumplen con la definición de porosidad débil (Definición 4.10).

A este fin, supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^M$ es un conjunto $2\gamma\rho_{d,E}(B)$ -disperso maximal en D_γ . Notemos que, si fijamos $\tilde{r} = \gamma\rho_{d,E}(B)$, entonces $\bigcup_{i=1}^M B_d(x_i, 2\tilde{r})$ contiene a D_γ debido a la propiedad de maximalidad de $\{x_i\}_{i=1}^M$. A continuación, extraemos una subfamilia de $\{B_d(x_i, \tilde{r})\}_{i=1}^M$ de la siguiente manera: sea $i_1 := 1$. Suponiendo que hemos definido índices $i_1, \dots, i_k$ y que $\Omega_k = \{1 \leq i \leq M : B_d(x_i, \tilde{r}) \cap B_d(x_{i_j}, \tilde{r}) = \emptyset, \forall 1 \leq j \leq k\}$ es no vacío, elegimos el siguiente índice i_{k+1} como un elemento cualquiera de este conjunto. Si, en cambio, Ω_k es vacío, tomamos $\tilde{M} = k$ y damos por concluido el procedimiento. Por construcción, la colección $\{B_d(x_{i_j}, \tilde{r})\}_{j=1}^{\tilde{M}}$

es claramente disjunta de a pares. Además, dado $z \in B_d(x_i, 2\tilde{r})$ ($1 \leq i \leq M$), existe $1 \leq j \leq \tilde{M}$ tal que $B_d(x_i, \tilde{r}) \cap B_d(x_{i_j}, \tilde{r}) \neq \emptyset$. Sea ahora w un punto en esta intersección. Se sigue que

$$d(z, x_{i_j}) \leq K_d[d(z, w) + d(w, x_{i_j})] \leq K_d[K_d[d(z, x_i) + d(x_i, w)] + d(w, x_{i_j})] < K_d(3K_d + 1)\tilde{r}.$$

Esto implica que la unión de bolas dilatadas $\bigcup_{j=1}^{\tilde{M}} B_d(x_{i_j}, K_d(3K_d + 1)\tilde{r})$ contiene al conjunto D_γ , mientras que la colección $\{B_d(x_{i_j}, \tilde{r})\}_{j=1}^{\tilde{M}}$ es disjunta por pares. Por otra parte, como cada $x_{i_j} \in D_\gamma$, también se cumple $B_d(x_{i_j}, \tilde{r}) \subseteq B \setminus E$. Además, las desigualdades $\gamma\rho_{d,E}(B) = \tilde{r} \leq 2K_d\gamma r < 2K_d r$ implican que la colección $\{B_d(x_{i_j}, \tilde{r})\}_{j=1}^{\tilde{M}}$ satisface las propiedades 4.10.1, 4.10.2 y 4.10.3 de la Definición 4.10. Finalmente, para ver que se cumple 4.10.4, recurrimos a (4.13) y estimamos

$$\begin{aligned} C\mu(B) &\leq \mu(D_\gamma) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{M}} B_d(x_{i_j}, K_d(3K_d + 1)\tilde{r})\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\tilde{M}} \mu(B_d(x_{i_j}, K_d(3K_d + 1)\tilde{r})) \\ &\leq c_{\mu,d}^m \sum_{j=1}^{\tilde{M}} \mu(B_d(x_{i_j}, \tilde{r})) \end{aligned}$$

donde $m \geq 2$ es tal que $2^{m-1} < K_d(3K_d + 1) \leq 2^m$. Luego,

$$\sum_{j=1}^{\tilde{M}} \mu(B_d(x_{i_j}, \tilde{r})) \geq \sigma\mu(B)$$

con $\sigma = \sigma(\alpha, K_d, c_{\mu,d}, [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X,d,\mu)}) \in (0, 1)$ y E es (σ, γ) -débilmente poroso. $\blacksquare$

Como se mencionó con anterioridad, en el caso de los espacios métricos con medida duplicante, un resultado análogo al Teorema 1.2 requiere de una hipótesis adicional a la porosidad débil del conjunto E : la duplicación la función $\rho_{d,E}$ (ver [Mud25]). Veremos que para espacios de tipo homogéneo esta hipótesis extra se mantiene. En particular, la condición A_1 del peso distancia implica también duplicación de la función de poro maximal.

Teorema 4.15. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las d -bolas forman una base de la topología. Sea E un subconjunto no vacío de X . Si existe algún $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$, entonces $\rho_{d,E}$ es duplicante.*

Demostración. Sea $B = B_d(y, r)$ una bola arbitraria en X . Escribimos λB para referirnos a la bola $B_d(y, \lambda r)$, para un cierto $\lambda > 0$. Consideraremos dos casos por separado: cuando $\lambda_0 B \cap E = \emptyset$ y cuando $\lambda_0 B \cap E \neq \emptyset$, donde $\lambda_0^{-1} := K_d[2K_d + 1]$.

En el primer caso, se tiene que $B_d(y, \lambda_0 r) \subseteq B \setminus E$, de donde se deduce que $\lambda_0 r \in \Lambda(y, r; d, E)$, y por lo tanto $\rho_{d,E}(B) \geq \lambda_0 r$. Dado que $\rho_{d,E}(2B) \leq 4K_d r$ por definición de $\rho_{d,E}$, la cota

$$\rho_{d,E}(2B) \leq 4K_d \lambda_0^{-1} \rho_{d,E}(B) = 4K_d^2[2K_d + 1] \rho_{d,E}(B)$$

se sigue de manera inmediata.

Supongamos ahora que $\lambda_0 B \cap E \neq \emptyset$. Observemos, utilizando (4.11), que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\leq \frac{c_{\mu,d}}{\mu(2B)} \int_{2B} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq c_{\mu,d} [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X,d,\mu)} \operatorname{ess\,inf}_{x \in 2B} d(x, E)^{-\alpha} \\ &\leq c_{\mu,d} [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_1(X,d,\mu)} C \rho_{d,E}(2B)^{-\alpha} \\ &=: \tilde{C} \rho_{d,E}(2B)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B)} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\geq \frac{1}{\mu(B)} \int_{\lambda_0 B} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\geq \frac{\mu(\lambda_0 B)}{\mu(B)} \operatorname{ess\,inf}_{x \in \lambda_0 B} d(x, E)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Veamos ahora que $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \lambda_0 B} d(x, E)^{-\alpha} \geq \rho_{d,E}^{-\alpha}$. Si $x \in \lambda_0 B \setminus \bar{E}$ y denotamos $t = d(x, E)$, entonces $0 < t \leq 2K_d \lambda_0 r$ (dado que $\lambda_0 B \cap E \neq \emptyset$). Además, si $X \setminus B \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} d(x, X \setminus B) &\geq \frac{1}{K_d} d(y, X \setminus B) - d(y, x) \\ &\geq \left(\frac{1}{K_d} - \lambda_0 \right) r = \left(\frac{1}{K_d} - \frac{1}{K_d[2K_d + 1]} \right) r \\ &= \frac{2K_d + 1 - 1}{K_d[2K_d + 1]} r \\ &= 2K_d \lambda_0 r \\ &\geq t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B_d(x, t) \subseteq B \setminus E$. Notemos que esta inclusión se cumple trivialmente aún si $X \setminus B = \emptyset$. Luego, dado que $t < 2K_d r$, tenemos $t \in \Lambda(y, r; d, E)$, lo que implica que $\rho_{d,E}(B) \geq t = d(x, E)$, y en consecuencia $\rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \leq d(x, E)^{-\alpha}$ para todo $x \in \lambda_0 B \setminus \bar{E}$. Por lo tanto, como $\mu(\bar{E}) = 0$, se obtiene

$$\rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in \lambda_0 B} d(x, E)^{-\alpha}. \quad (4.16)$$

Para terminar, combinando (4.14), (4.15) y (4.16) se deduce

$$\frac{\mu(\lambda_0 B)}{\mu(B)} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \leq \tilde{C} \rho_{d,E}(2B)^{-\alpha},$$

o, equivalentemente,

$$\rho_{d,E}(2B) \leq \tilde{C} \rho_{d,E}(B)$$

reassignando el valor de $\tilde{C}$ convenientemente. ■

4.5 La porosidad débil como condición suficiente

La demostración que la porosidad débil junto con la duplicación de la función de poro maximal implican la condición A_1 para un peso distancia apropiado requiere un esfuerzo considerablemente mayor a su recíproco, considerado en la sección anterior. En esta sección se hará uso varias de las herramientas introducidas en el Capítulo 2. La estrategia es la siguiente. Dado que ambas hipótesis son invariantes ante cambios de cuasi-métricas equivalentes en la clase reducida $\mathcal{D}^*(X, d)$

(Lemas 4.5 y 4.12), basta demostrar el resultado para la cuasi-métrica δ de Macías y Segovia obtenida a partir de d . Las propiedades particulares de esta casi-métrica serán entonces aprovechadas para obtener un lema de cubrimiento para conjuntos de la forma

$$E_\delta^{x,r}(\varepsilon) := \{y \in B_\delta(x, r) : \delta(y, E) < \varepsilon\}.$$

Luego, este lema de cubrimiento se utilizará para demostrar un decaimiento exponencial en medida de los conjuntos $E_\delta^{x,r}(\varepsilon)$ en función del parámetro ε . Finalmente, este hecho nos permitirá demostrar el resultado principal de la sección (el Teorema 4.18).

Teniendo en cuenta la estrategia anterior, es conveniente recordar que la cuasi-métrica δ introducida en la Definición 2.42 cumple $\delta \sim d$, $K_\delta \leq 2K_d^3$ y hereda automáticamente la propiedad que toda δ -bola es abierta. Además, existe un número positivo $\beta = \beta(K_d)$ tal que para todo $x \in X$, $r > 0$, $0 < s \leq 2K_d r$ y $y \in B_d(x, r)$, existe $z \in X$ que cumple

$$B_\delta(z, \beta s) \subseteq B_\delta(y, s) \cap B_\delta(x, r). \quad (4.17)$$

Si $E \subseteq X$ es un subconjunto no vacío, dado $\varepsilon > 0$ denotamos por

$$E_\delta(\varepsilon) := \{x \in X : \delta(x, E) < \varepsilon\}$$

al ε -entorno de E con respecto a δ , con lo cual $E_\delta^{x,r}(\varepsilon) = E_\delta(\varepsilon) \cap B_\delta(x, r)$.

Lema 4.16. *Sea E un subconjunto no vacío de X tal que $\rho_{\delta,E}$ es positiva¹⁸ y duplicante. Sean $B_\delta^0 := B_\delta(x_0, r_0)$ una bola en X con $B_\delta^0 \cap E \neq \emptyset$ y $0 < \varepsilon < \rho_{\delta,E}(B_\delta^0)$. Entonces, existen un conjunto de índices I a lo sumo numerable, para cada $i \in I$ un punto $z_i \in X$ y un número positivo t_i tales que:*

4.16.1. *las bolas en $\{B_\delta(z_i, t_i)\}_{i \in I}$ son disjuntas de a pares y $\bigcup_{i \in I} B_\delta(z_i, t_i) \subseteq E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$;*

4.16.2. *$E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} B_\delta\left(z_i, \frac{4K_\delta^2}{\beta} t_i\right)$, donde β es la constante en (4.17);*

4.16.3. *para cada $i \in I$ existe $y_i \in B_\delta^0 \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$ tal que $\delta(z_i, y_i) \leq \frac{10K_\delta^3}{\beta} t_i$;*

4.16.4. *para $0 < \eta \leq \frac{\beta}{9K_\delta^3}$, el conjunto $I_\eta = \{i \in I : t_i \geq \eta\varepsilon\}$ es no vacío y se cumple*

$$\rho_{\delta,E}(B_\delta(z_i, t_i)) \geq \Theta(\eta)\varepsilon, \quad \forall i \in I_\eta, \quad (4.18)$$

con $\Theta(\eta) := \left[\frac{2K_\delta}{\eta} + \frac{20K_\delta^4}{\beta} \right]^{-\log_2 C_{\delta,E}}$ y donde $C_{\delta,E}$ es la constante de duplicación de $\rho_{\delta,E}$.

Demostración. Consideremos el conjunto $\Omega_\varepsilon := E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$, visto como un subconjunto del espacio cuasi-métrico (B_δ^0, δ_*) , donde δ_* es la restricción de δ sobre B_δ^0 . El conjunto Ω_ε es abierto, acotado y propio en B_δ^0 . En efecto, dado que $0 < \varepsilon < \rho_{\delta,E}(B_\delta^0)$, podemos tomar ζ tal que $\varepsilon < \zeta < \rho_{\delta,E}(B_\delta^0)$ y una δ -bola $B_\delta(x, \zeta)$ que no interseque con E y esté contenida en B_δ^0 . Como $\varepsilon < \zeta$, es claro que x , el centro de esta bola, no pertenece a $E_\delta(\varepsilon)$, por lo tanto $x \in B_\delta^0 \setminus \Omega_\varepsilon = B_\delta^0 \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$.

Apliquemos ahora el Lema 2.22 a Ω_ε , usando la constante triangular $K = K_\delta$, para obtener una familia de δ_* -bolas $\{B_{\delta_*}(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ en (B_δ^0, δ_*) que cumplen 2.22.1-2.22.4. Notemos que $B_{\delta_*}(x, t) = B_\delta(x, t) \cap B_\delta^0$, donde $B_\delta(x, t)$ es la δ -bola en X centrada en $x \in B_\delta^0$ con radio t . Luego, tenemos

$$\bigcup_{i \in I} B_{\delta_*}(x_i, r_i) \subseteq E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) = \bigcup_{i \in I} B_\delta(x_i, 3K_\delta r_i). \quad (4.19)$$

¹⁸Recordemos que, en particular, todo conjunto débilmente poroso E satisface la hipótesis de positividad de su función de poro maximal

Fijemos ahora un índice $i \in I$. Como $B_\delta^0 \setminus \Omega_\varepsilon \neq \emptyset$ y $B_{\delta_*}(x_i, r_i) \subseteq \Omega_\varepsilon$, se tiene que $r_i \leq 2K_\delta r_0$, por lo que usando el Teorema 2.45 podemos hallar un punto $z_i \in X$ tal que $B_\delta(z_i, \beta r_i) \subseteq B_{\delta_*}(x_i, r_i)$. Como $z_i \in B_{\delta_*}(x_i, r_i)$, también se cumple $B_{\delta_*}(x_i, 3K_\delta r_i) \subseteq B_\delta(z_i, 4K_\delta^2 r_i)$. Luego,

$$\bigcup_{i \in I} B_\delta(z_i, t_i) \subseteq E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} B_\delta\left(z_i, \frac{4K_\delta^2}{\beta} t_i\right), \quad (4.20)$$

donde $t_i := \beta r_i$ y las bolas $B_\delta(z_i, t_i)$ son disjuntas de a pares, ya que, según 2.22.1, las bolas $B_{\delta_*}(x_i, r_i)$ poseen esta propiedad. Las inclusiones de arriba prueban 4.16.1 y 4.16.2.

Para probar 4.16.3, notemos que por 2.22.4 para cada $i \in I$ existe algún punto $y_i \in B_\delta^0 \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$ tal que $\delta_*(x_i, y_i) \leq 9K_\delta^2 r_i$. De esto se deduce que

$$\delta(z_i, y_i) \leq K_\delta[\delta(z_i, x_i) + \delta(x_i, y_i)] \leq K_\delta[r_i + 9K_\delta^2 r_i] \leq 10K_\delta^3 \beta^{-1} t_i, \text{ para todo } i \in I. \quad (4.21)$$

Finalmente, probemos 4.16.4. Dado $e \in E \cap B_\delta^0$, debido a (4.19) debe existir $i \in I$ tal que $e \in B_{\delta_*}(x_i, 3K_\delta r_i)$, por lo que (usando la segunda desigualdad en 2.22.3)

$$\varepsilon \leq \delta_*(e, B_\delta^0 \setminus \Omega_\varepsilon) \leq 9K_\delta^3 r_i = \frac{9K_\delta^3}{\beta} t_i,$$

de modo que $t_i \geq \frac{\beta}{9K_\delta^3} \varepsilon$ cuando $B_{\delta_*}(x_i, 3K_\delta r_i) \cap E \neq \emptyset$. Así, si $0 < \eta \leq (9K_\delta^3)^{-1} \beta$ y consideramos el conjunto de índices $I_\eta := \{i \in I : t_i \geq \eta \varepsilon\}$, tenemos $I_\eta \neq \emptyset$. Tomemos ahora $i \in I_\eta$, como $B_\delta(y_i, \varepsilon) \cap E = \emptyset$, usando (4.21) deducimos que

$$B_\delta(y_i, \varepsilon) \subseteq B_\delta\left(z_i, [K_\delta \eta^{-1} + 10K_\delta^4 \beta^{-1}] t_i\right) \quad \text{y} \quad \varepsilon \leq \eta^{-1} t_i \leq 2K_\delta [K_\delta \eta^{-1} + 10K_\delta^4 \beta^{-1}] t_i,$$

luego $\varepsilon \in \Lambda(z_i, [K_\delta \eta^{-1} + 10K_\delta^4 \beta^{-1}] t_i; \delta, E)$ y

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \rho_{\delta, E}\left(B_\delta(z_i, [K_\delta \eta^{-1} + 10K_\delta^4 \beta^{-1}] t_i)\right) \\ &\leq C_{\delta, E}^m \rho_{\delta, E}(B_\delta(z_i, t_i)), \end{aligned}$$

donde m es el entero definido por las relaciones $2^{m-1} < \frac{K_\delta}{\eta} + \frac{10K_\delta^4}{\beta} \leq 2^m$. De estas desigualdades se desprende (4.18). $\blacksquare$

A partir del lema de cubrimiento anterior, estudiamos ahora cómo decrece el valor de $\mu(E_\delta^{x, r}(\varepsilon))$ en función del parámetro ε .

Lema 4.17. *Sea E un conjunto (σ_0, γ_0) -débilmente poroso en X con respecto a δ y tal que $\rho_{\delta, E}$ es duplicante. Dada una bola $B_\delta^0 = B_\delta(x_0, r_0)$ tal que $B_\delta^0 \cap E \neq \emptyset$ y sea $0 < \varepsilon < \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)$, existen constantes $0 < p, q < 1$, independientes de ε , tales que:*

$$4.17.1. \quad \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(p\varepsilon)) \leq q \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon));$$

$$4.17.2. \quad \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\frac{1}{2} p^k \rho_{\delta, E}(B_\delta^0))) \leq q^k \mu(B_\delta^0), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0;$$

$$4.17.3. \quad \mu(\bar{E}) = 0.$$

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)$. Para $\eta > 0$, consideremos la función

$$\Theta(\eta) = \left[\frac{2K_\delta}{\eta} + \frac{20K_\delta^4}{\beta} \right]^{-\log_2 C_{\delta, E}}$$

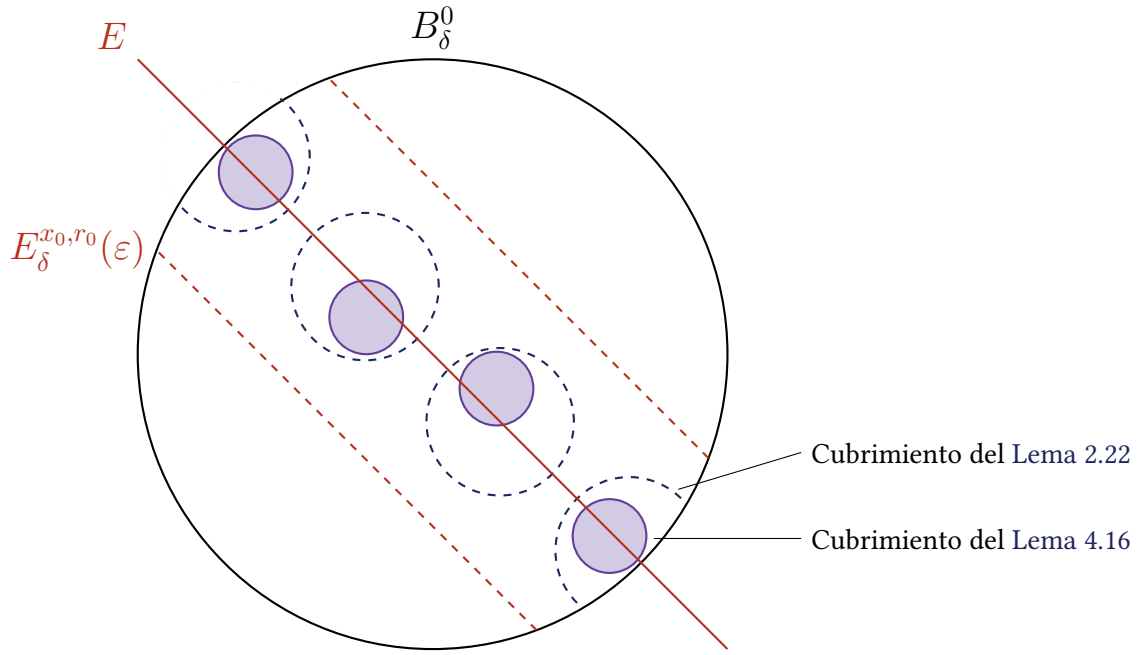


Figura 4.4: Las bolas $B_\delta(x_i, r_i)$ del Lema 2.22 aplicado sobre el abierto $\Omega = F_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon)$ visto como un subconjunto del espacio $(B_\delta^0, \delta_*, \mu_*)$ pueden no ser bolas del espacio ambiente (X, d, μ) , lo que presenta una desventaja dado que la condición de porosidad débil de E sólo aplica sobre las bolas de este espacio. La solución a este problema viene dada por el Lema 4.16, que aporta un cubrimiento adecuado en términos de δ -bolas de (X, d, μ) y que además cumplen con las propiedades 4.16.3 y 4.16.4, esenciales para la demostración del Lema 4.17.

introducida en el Lema 4.16. Dado que la constante $C_{\delta, E}$ es mayor que uno (por la condición de porosidad débil de E) el exponente $-\log_2 C_{\delta, E}$ es negativo y Θ es una función creciente de η . Además, $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Theta(\eta) = 0$ y $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = \left(\frac{\beta}{26K_\delta^4}\right)^{\log_2 C_{\delta, E}} < 1$. Consideremos ahora el número

$$\eta_0 := \sup \left\{ \eta \in \left(0, \frac{\beta}{9K_\delta^3}\right] : \eta \leq \frac{\frac{1}{K_\delta} - \frac{\gamma_0}{2K_\delta} \Theta(\eta)}{K_\delta + 10K_\delta^4 \beta^{-1}} \right\}, \quad (4.22)$$

de modo que η_0 está bien definido como el mayor número positivo que satisface la desigualdad que figura en (4.22) y que en simultáneo es menor que la cota $\frac{\beta}{9K_\delta^3}$.

Dado que $0 < \eta_0 \leq \frac{\beta}{9K_\delta^3}$, las bolas $B_\delta(z_i, t_i)$ del cubrimiento asociado al Lema 4.16 con $i \in I_{\eta_0}$ cumplen

$$\rho_{\delta, E}(B_\delta(z_i, t_i)) \geq \Theta(\eta_0)\epsilon. \quad (4.23)$$

Teniendo en cuenta esto, tomemos $\epsilon' := \frac{\gamma_0}{2K_\delta} \Theta(\eta_0)\epsilon$. Notemos que $\epsilon' < \epsilon$ dado que $\Theta(\eta) < 1$ para todo $\eta > 0$. Procedamos ahora a estimar la medida del conjunto $E_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon')$ usando 4.16.1:

$$\begin{aligned} \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon')) &\geq \mu\left(\bigcup_{i \in I} B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\epsilon')\right) \\ &= \sum_{i \in I} \mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\epsilon')). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Analicemos individualmente las medidas de los conjuntos $B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\epsilon')$ separando los

casos según el índice $i \in I_{\eta_0}$ o bien $i \in I \setminus I_{\eta_0}$. La Figura 4.5 esquematiza la estrategia a seguir en cada caso.

En el caso de las bolas pequeñas, es decir, cuando $i \in I \setminus I_{\eta_0}$, invocamos 4.16.3 para hallar un punto $y_i \in B_\delta^0 \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$ tal que $\delta(z_i, y_i) \leq 10K_\delta^3\beta^{-1}t_i$. Observemos que $K_\delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon' = K_\delta^{-1}\varepsilon(1 - \frac{\gamma_0}{2}\Theta(\eta_0)) > 0$, por lo que afirmamos a continuación que

$$B_\delta(y_i, K_\delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon') \cap E_\delta(\varepsilon') = \emptyset.$$

Para verificar esta afirmación, tomemos $w \in B_\delta(y_i, K_\delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon')$ y $e \in E$. Luego,

$$\delta(w, e) \geq K_\delta^{-1}\delta(y_i, e) - \delta(y_i, w) \geq K_\delta^{-1}\varepsilon - K_\delta^{-1}\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon',$$

dado que $B_\delta(y_i, \varepsilon) \cap E = \emptyset$. Por lo tanto $w \notin E_\delta(\varepsilon')$, lo que demuestra lo afirmado. Ahora, afirmamos que $B_\delta(z_i, t_i) \subseteq B_\delta(y_i, K_\delta^{-1}\varepsilon - \varepsilon')$, por lo que en particular $B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon') = B_\delta(z_i, t_i)$. Para probar esto, tomemos $w \in B_\delta(z_i, t_i)$ y, recordando que $t_i < \eta_0\varepsilon$, deducimos

$$\begin{aligned} \delta(w, y_i) &\leq K_\delta[\delta(w, z_i) + \delta(z_i, y_i)] \\ &< t_i[K_\delta + 10K_\delta^4\beta^{-1}] \\ &< \eta_0\varepsilon[K_\delta + 10K_\delta^4\beta^{-1}] \leq \varepsilon\left(\frac{1}{K_\delta} - \frac{\gamma_0}{2K_\delta}\Theta(\eta_0)\right) = \frac{\varepsilon}{K_\delta} - \varepsilon', \end{aligned}$$

tal como se afirmó. Esto implica que

$$\mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) = \mu(B_\delta(z_i, t_i)) \quad (4.25)$$

para todo $i \in I \setminus I_{\eta_0}$.

Por otro lado, si $i \in I_{\eta_0}$ (esto es, el caso de las bolas grandes), siendo E un conjunto débilmente poroso en X con respecto a δ , podemos encontrar una secuencia finita de bolas disjuntas de pares $\{B_\delta(z_j^i, s_j^i)\}_{j=1}^N$ tales que

- (i) $B_\delta(z_j^i, s_j^i) \subseteq B_\delta(z_i, t_i) \setminus E$ para todo $1 \leq j \leq N$;
- (ii) $s_j^i \geq \gamma_0\rho_{\delta, E}(B_\delta(z_i, t_i))$, para todo $j = 1, \dots, N$;
- (iii) $s_j^i \leq 2K_\delta t_i$ para todo $j = 1, \dots, N$;
- (iv) $\sum_{j=1}^N \mu(B_\delta(z_j^i, s_j^i)) \geq \sigma_0\mu(B_\delta(z_i, t_i))$.

A partir de (ii) y (4.23), se deduce que $s_j^i \geq \gamma_0\Theta(\eta_0)\varepsilon$, lo que a su vez implica $\frac{1}{K_\delta}s_j^i - \varepsilon' = \frac{1}{K_\delta}(s_j^i - \frac{\gamma_0}{2}\Theta(\eta_0)\varepsilon) \geq \frac{1}{2K_\delta}s_j^i$. Además, se cumple $B_\delta(z_j^i, K_\delta^{-1}s_j^i - \varepsilon') \cap E_\delta(\varepsilon') = \emptyset$. Para ver esto, procedemos como en el caso anterior: tomamos $w \in B_\delta(z_j^i, K_\delta^{-1}s_j^i - \varepsilon')$ y $e \in E$. Luego, vemos que

$$\delta(w, e) \geq K_\delta^{-1}\delta(z_j^i, e) - \delta(z_j^i, w) \geq K_\delta^{-1}s_j^i - K_\delta^{-1}s_j^i + \varepsilon' = \varepsilon',$$

por lo que $w \notin E_\delta(\varepsilon')$. Se obtiene entonces que, para $i \in I_{\eta_0}$,

$$\begin{aligned}
 \mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) &\geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^N B_\delta(z_j^i, s_j^i) \setminus E_\delta(\varepsilon')\right) \\
 &= \sum_{j=1}^N \mu(B_\delta(z_j^i, s_j^i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) \\
 &\geq \sum_{j=1}^N \mu\left(B_\delta\left(z_j^i, \frac{s_j^i}{K_\delta} - \varepsilon'\right)\right) \\
 &\geq \sum_{j=1}^N \mu\left(B_\delta\left(z_j^i, \frac{1}{2K_\delta} s_j^i\right)\right) \\
 &\geq \frac{1}{c_{\mu, \delta}^k} \sum_{j=1}^N \mu(B_\delta(z_j^i, s_j^i)) \\
 &\geq \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^k} \mu(B_\delta(z_i, t_i)).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde $2^{k-1} < 2K_\delta \leq 2^k$.

De las cotas obtenidas en (4.24), (4.25) y (4.26) podemos estimar la medida de la diferencia $E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon')$:

$$\begin{aligned}
 \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon')) &\geq \sum_{i \in I \setminus I_{\eta_0}} \mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) + \sum_{i \in I_{\eta_0}} \mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) \\
 &\geq \sum_{i \in I \setminus I_{\eta_0}} \mu(B_\delta(z_i, t_i)) + \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^k} \sum_{i \in I_{\eta_0}} \mu(B_\delta(z_i, t_i)) \\
 &\geq \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^k} \sum_{i \in I} \mu(B_\delta(z_i, t_i)) \\
 &\geq \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^{k+l}} \sum_{i \in I} \mu\left(B_\delta\left(z_i, \frac{4K_\delta^2}{\beta} t_i\right)\right) \\
 &\geq \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^{k+l}} \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)),
 \end{aligned}$$

donde l se eligió de forma tal que se cumpla $2^{l-1} < \frac{4K_\delta^2}{\beta} \leq 2^l$.

Si tomamos $p := \frac{\gamma_0}{2K_\delta} \Theta(\eta_0)$ y $q := 1 - \sigma_0 c_{\mu, \delta}^{-k-l}$, entonces $0 < p, q < 1$, $\varepsilon' = p\varepsilon$ y la desigualdad

$$\mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon')) \geq \frac{\sigma_0}{c_{\mu, \delta}^{k+l}} \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon))$$

puede reescribirse como

$$\mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)) - \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(p\varepsilon)) \geq (1 - q) \mu(E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)),$$

lo cual se puede reorganizar para obtener 4.17.1.

El ítem 4.17.2 se obtiene fácilmente aplicando 4.17.1 reiteradas veces, comenzando con el valor $\varepsilon = \frac{p^k}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)$:

$$\begin{aligned} \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(\frac{p^k}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)\right)\right) &\leq q \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(\frac{p^{k-1}}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)\right)\right) \\ &\vdots \\ &\leq q^k \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(\frac{1}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)\right)\right) \\ &\leq q^k \mu(B_\delta^0). \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos 4.17.3. Notemos primero que $\bar{E} \subseteq \bigcup_{e \in E} B_\delta(e, r) = E_\delta(r)$ para cualquier $r > 0$, por lo que basta verificar que $\mu(\bar{E} \cap B_\delta(e, r)) = 0$ para todo $e \in E$ y $r > 0$. Dada tal bola $B_\delta := B_\delta(e, r)$, como su centro pertenece a E , claramente $B_\delta \cap E \neq \emptyset$ y podemos aplicar 4.17.1 con $E_\delta(\varepsilon) := E_\delta(\varepsilon) \cap B_\delta$. De hecho, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\bar{E} \cap B_\delta) \leq \mu\left(E_\delta\left(\frac{p^k}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta)\right) \cap B_\delta\right) = \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(\frac{p^k}{2} \rho_{\delta, E}(B_\delta)\right)\right) \leq q^k \mu(B_\delta),$$

y tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene $\mu(\bar{E} \cap B_\delta) = 0$. ■

Las desigualdades 4.17.1 y 4.17.2, válidas para bolas $B_\delta(x, r)$ que intersecan con E , tienen implicaciones importantes sobre las propiedades de pesos distancia de la forma $w = \delta(\cdot, E)^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$. En efecto, w crece al ritmo de $\varepsilon^{-\alpha}$ en los conjuntos $E_\delta^{x, r}(\varepsilon)$. Pero 4.17.2 indica que también la medida de estos conjuntos decrece exponencialmente en términos de las constantes p y q ; por lo que una elección apropiada de la potencia α debería asegurar, por lo menos, la integrabilidad de w sobre una bola $B_\delta(x, r)$ como la considerada. Este es precisamente el argumento a utilizar en el Teorema 4.18, donde se demostrará la condición A_1 de w para valores de α suficientemente pequeños. Antes, sin embargo, exploramos brevemente algunas otras implicaciones del decrecimiento en medida de los ε -entornos de un conjunto débilmente poroso E .

Sea $E \subseteq X$ un conjunto (σ_0, γ_0) -débilmente poroso tal que $\rho_{\delta, E}$ es duplicante. Dada una bola $B = B_\delta(x, r)$ tal que $B \cap E \neq \emptyset$, consideramos la función $\phi_B : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\phi_B(t) = \mu(E_\delta^{x, r}(t \rho_{\delta, E}(B))).$$

Por definición, ϕ_B es no decreciente y $\phi_B(t) \leq \mu(B)$. Además, el Lema 4.17 implica que $\phi_B(pt) \leq q \phi_B(t)$. Fijo $0 < t < 1$, sea m el entero definido por las relaciones $p^m > t \geq p^{m+1}$ (o, equivalentemente, $m < \frac{\log t}{\log p} \leq m+1$). Recurriendo a las propiedades anteriores de ϕ_B , vemos que

$$\phi_B(t) = \phi_B\left(p^m \frac{t}{p^m}\right) \leq q^m \phi_B\left(\frac{t}{p^m}\right) \leq q^m \mu(B) \leq \frac{1}{q} t^{\frac{\log q}{\log p}} \mu(B).$$

Teniendo en cuenta que $\mu(E_\delta^{x, r}(\varepsilon)) = \phi_B(\varepsilon \rho_{\delta, E}(B)^{-1})$ si $\varepsilon < \rho_{\delta, E}(B)$, deducimos

$$\frac{\mu(E_\delta^{x, r}(\varepsilon))}{\mu(B)} \leq \frac{1}{q} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_{\delta, E}(B)}\right)^{\alpha_0} \quad (4.27)$$

para todo $0 < \varepsilon < \rho_{\delta, E}(B)$ y donde $\alpha_0 := \frac{\log q}{\log p}$. Definimos el **exponente de Muckenhoupt** de E (con respecto a δ), denotado como $\text{Mu}_\delta(E)$, como el supremo $\alpha_0 \geq 0$ para el cual vale (4.27), en analogía con el concepto definido en [And+24] y [Mud25].

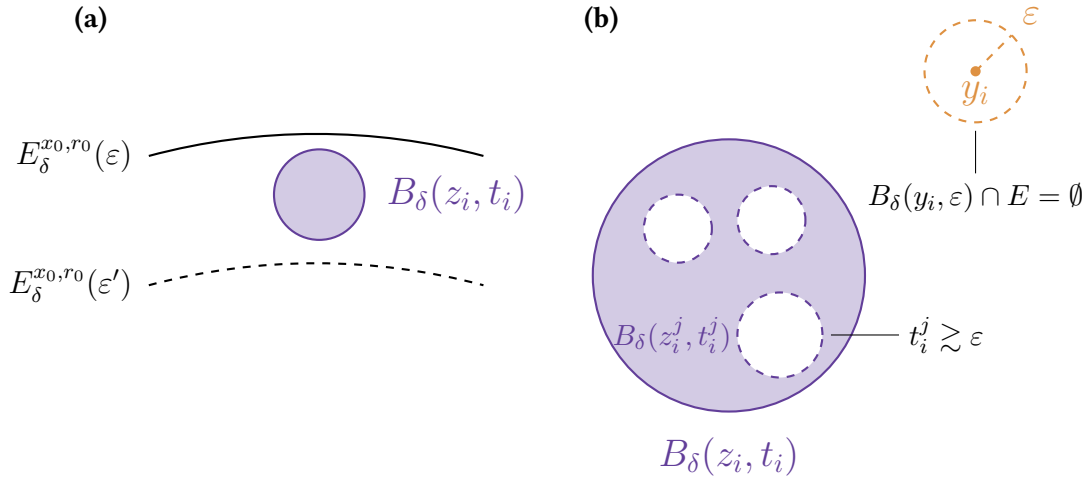


Figura 4.5: Cuando el índice $i \in I \setminus I_{\eta_0}$ (a), la bola $B_\delta(z_i, t_i)$ es pequeña y se encuentra próxima a la frontera de $E_\delta^{x_0, r_0}(\varepsilon)$, por lo que eligiendo ε' suficientemente pequeño se deduce que $B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon') = B_\delta(z_i, t_i)$. Cuando $i \in I_{\eta_0}$ (b), la estrategia debe compararse con la esquematizada en la Figura 1.3 para el caso de la recta real. Las bolas grandes se encuentran relativamente próximas a un poro $B_\delta(y_i, \varepsilon)$, lo que permite recurrir a la hipótesis de porosidad débil de E para cubrir una fracción de $B_\delta(z_i, t_i)$ con poros $B_\delta(z_i^1, t_i^1), \dots, B_\delta(z_i^N, t_i^N)$ de radio proporcional a ε . Al elegir ε' suficientemente pequeño, podemos asegurar que el frente de $E_\delta(\varepsilon')$ deja libre al menos una fracción de cada uno de estos poros, por lo que $\mu(B_\delta(z_i, t_i) \setminus E_\delta(\varepsilon')) \gtrsim \mu(B_\delta(z_i, t_i))$.

Hemos demostrado, a partir del Lema 4.17, que $\text{Mu}_\delta(E) > 0$ para todo $E \in \text{DP}(X, d, \mu)$ tal que $\rho_{d,E}$ duplica. Un beneficio de expresar el decaimiento en medida de los ε -entornos de E en términos del exponente de Muckenhoupt es que facilita la estimación de cotas de dimensión para este conjunto cuando (X, d, μ) es un ETH del tipo Ahlfors. En efecto, si (X, d, μ) es θ -Ahlfors, entonces (X, δ, μ) es θ -Ahlfors por la equivalencia $d \sim \delta$. Luego, existen constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que

$$c_1 r^\theta \leq \mu(B_\delta(x, r)) \leq c_2 r^\theta$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$.

Usando (4.27) podemos estimar el límite superior

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu((E \cap B_d(x, r))(\varepsilon)) \varepsilon^{s-\theta} &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(E_\delta(2K_d \varepsilon) \cap B_\delta(x, 2K_d r)) \varepsilon^{s-\theta} \\ &\lesssim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{s+\alpha_0-\theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $s > \theta - \alpha_0$. Luego, por la caracterización de la Proposición 2.39 para la dimensión de Minkowski, tenemos que $\dim_{M,\delta}(E(\varepsilon) \cap B_d(x, r)) \leq \theta - \alpha_0$. Usando ahora la comparación entre las dimensiones de Hausdorff y Minkowski 2.40.2, obtenemos

$$\dim_{H,\delta} E = \sup_{r>0} \dim_{H,\delta}(E \cap B_\delta(x, r)) \leq \overline{\dim}_{M,\delta}(E \cap B_\delta(x, r)) \leq \theta - \alpha_0$$

lo que implica $\dim_{H,d} E \leq \theta - \alpha_0$ debido a 2.40.1.

Teorema 4.18. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las d -bolas son conjuntos abiertos. Supongamos que E es un conjunto (σ, γ) -débilmente poroso en X con respecto a d tal que $\rho_{d,E}$ es*

duplicante. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que $w = d(\cdot, E)^{-\alpha}$ pertenece a $A_1(X, d, \mu)$. Más aún, las constantes α y $[w]_{A_1(X, d, \mu)}$ dependen de $\sigma, \gamma, K_d, c_{\mu, d}$ y $C_{d, E}$.

Demostración. Partiendo de d , consideramos la cuasi-métrica de Macías y Segovia $\delta \in \mathcal{D}^*(X, d)$ dada por la Definición 2.42. Dado que (X, d, μ) es (σ, γ) -débilmente poroso y la función $\rho_{d, E}$ satisface la condición de duplicación con constante $C_{d, E}$, por el Lema 4.12 se sigue que (X, δ, μ) es (σ_0, γ_0) -débilmente poroso y que $\rho_{\delta, E}$ satisface la condición de duplicación con constante $C_{\delta, E}$. Además, los parámetros σ_0, γ_0 y $C_{\delta, E}$ dependen de $K_d, c_{\mu, d}, \sigma, \gamma$ y $C_{d, E}$.

Por otro lado, debido a la Proposición 3.14 en la que vimos que también los pesos distancia son invariantes ante cambios de cuasi-métricas equivalentes, basta demostrar que para algún $\alpha > 0$, se cumple $\delta(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, \delta, \mu)$, de modo que buscamos constantes positivas C y α tales que, para toda bola $B_\delta^0 = B_\delta(x_0, r_0)$, se cumpla la desigualdad

$$\int_{B_\delta(x_0, r_0)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \leq C \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(x_0, r_0)} \delta(\cdot, E)^{-\alpha}. \quad (4.28)$$

Para demostrar esta desigualdad consideramos distintos casos en relación con la distancia de B_δ^0 respecto al conjunto E . Más precisamente, consideramos los siguientes tres casos:

- (a) $B_\delta(x_0, r_0) \cap E = \emptyset \wedge \delta(B_\delta(x_0, r_0), E) \geq 4K_\delta^2 r_0$;
- (b) $B_\delta(x_0, r_0) \cap E = \emptyset \wedge \delta(B_\delta(x_0, r_0), E) < 4K_\delta^2 r_0$;
- (c) $B_\delta(x_0, r_0) \cap E \neq \emptyset$,

donde $\delta(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} \delta(a, b)$ denota la distancia con respecto a δ entre los conjuntos A y B .

Consideremos el caso (a). Sean $x, y \in B_\delta^0$ y $\alpha > 0$ a determinar más adelante. Entonces,

$$\begin{aligned} \delta(x, E) &\geq \frac{1}{K_\delta} \delta(y, E) - \delta(x, y) \\ &\geq \frac{1}{K_\delta} \delta(y, E) - 2K_\delta r_0 \\ &\geq \frac{1}{K_\delta} \delta(y, E) - \frac{1}{2K_\delta} \delta(B_\delta^0, E) \\ &\geq \frac{1}{2K_\delta} \delta(y, E). \end{aligned}$$

De este modo, $\delta(x, E)^{-\alpha} \leq (2K_\delta)^\alpha \operatorname{ess\,inf}_{y \in B_\delta^0} \delta(y, E)^{-\alpha}$ para todo $\alpha > 0$ y todo $x \in X$. Luego,

$$\int_{B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \leq (2K_\delta)^\alpha \operatorname{ess\,inf}_{y \in B_\delta^0} \delta(y, E)^{-\alpha}. \quad (4.29)$$

El caso (b) puede deducirse a partir del caso (c) observando que, si m es elegido de forma tal que $2^{m-1} \leq 5K_\delta^3 \leq 2^m$, se cumple

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\leq \frac{\mu(5K_\delta^3 B_\delta^0)}{\mu(B_\delta^0)} \int_{5K_\delta^3 B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq c_{\mu, \delta}^m \int_{5K_\delta^3 B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x). \end{aligned}$$

Notemos que $5K_\delta^3 B_\delta^0 \cap E \neq \emptyset$. Luego, suponiendo que (4.28) se cumple en el caso (c) para valores apropiados de $\alpha > 0$, se tiene

$$\int_{B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \leq C c_{\mu, \delta}^m \text{ ess inf}_{5K_\delta^3 B_\delta^0} \delta(\cdot, E)^{-\alpha} \leq C c_{\mu, \delta}^m \text{ ess inf}_{B_\delta^0} \delta(\cdot, E)^{-\alpha}, \quad (4.30)$$

como debía demostrarse.

Consideremos finalmente el caso (c). Supongamos que $B_\delta^0 \cap E \neq \emptyset$ y denotemos $\rho = \rho_{\delta, E}(B_\delta^0)$. A continuación, procedemos a particionar la integral del lado izquierdo de (4.28) usando la notación $E_\delta(\cdot)$ y $E_\delta^{x, r}(\cdot)$ introducida en el Lema 4.17:

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta^0} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &= \int_{B_\delta^0 \setminus E_\delta(\frac{1}{2}\rho)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) + \int_{E_\delta^{x_0, r_0}(\frac{1}{2}\rho)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\alpha} \mu\left(B_\delta^0 \setminus E_\delta\left(\frac{1}{2}\rho\right)\right) + \int_{E_\delta^{x_0, r_0}(\frac{1}{2}\rho)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para hallar una cota adecuada del segundo término en (4.31), notemos que el integrando puede expresarse como

$$\begin{aligned} E_\delta^{x_0, r_0}(2^{-1}\rho) &= \{x \in B_\delta^0 : \delta(x, E) < 2^{-1}\rho\} \\ &= \{x \in B_\delta^0 : \delta(x, E) = 0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in B_\delta^0 : 2^{-1}p^{k+1}\rho \leq \delta(x, E) < 2^{-1}p^k\rho\} \\ &= (\bar{E} \cap B_\delta^0) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} E_\delta^{x_0, r_0}(2^{-1}p^k\rho) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(2^{-1}p^{k+1}\rho), \end{aligned}$$

donde $0 < p < 1$ es el número provisto por el Lema 4.17. Además, por 4.17.3, $\mu(\bar{E}) = 0$. Por lo tanto, a partir de 4.17.2, podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{E_\delta^{x_0, r_0}(\frac{1}{2}\rho)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_\delta^{x_0, r_0}(p^k \frac{\rho}{2}) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}(p^{k+1} \frac{\rho}{2})} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{k+1} \frac{\rho}{2}\right)^{-\alpha} \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(p^k \frac{\rho}{2}\right) \setminus E_\delta^{x_0, r_0}\left(p^{k+1} \frac{\rho}{2}\right)\right) \\ &\leq \left(p \frac{\rho}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-\alpha})^k \mu\left(E_\delta^{x_0, r_0}\left(p^k \frac{\rho}{2}\right)\right) \\ &\leq \left(p \frac{\rho}{2}\right)^{-\alpha} \mu(B_\delta^0) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{p^\alpha}\right)^k \\ &\leq C(\alpha) \mu(B_\delta^0) \rho^{-\alpha}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue al tomar $\alpha > 0$ suficientemente pequeño como para asegurar que $p^{-\alpha}q < 1$. Ahora, dado que $B_\delta^0 \cap E \neq \emptyset$ y $\mu(\bar{E}) = 0$, el Lema 4.4 demostrado al inicio de este capítulo implica que

$$\int_{E_\delta(\frac{1}{2}\rho)} \delta(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \leq \tilde{C}(\alpha) \mu(B_\delta^0) \text{ ess inf}_{B_\delta^0} \delta(\cdot, E)^{-\alpha}. \quad (4.32)$$

Combinando entonces (4.29), (4.30), (4.31) y (4.32), y tomando el máximo entre todas las constantes obtenidas, se sigue que $d(\cdot, E)^{-\alpha}$ pertenece a la clase $A_1(X, \delta, \mu)$ para todo $\alpha > 0$ tal que $p^{-\alpha}q < 1$. ■

De los Teoremas 4.14, 4.15 y 4.18, concluimos

$$\Sigma_1(X, d, \mu) = \text{DP}(X, d, \mu) \cap \{E \in \mathcal{P}(X) : \rho_{d,E} \text{ es duplicante}\}$$

como solución al Problema 3.15 con la hipótesis adicional que las d -bolas son base de la topología cuasi-métrica. Análogamente, esto se puede enunciar de la forma siguiente.

Teorema 4.19. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo tal que toda d -bola es un conjunto abierto. Sea E un subconjunto no vacío de X . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

4.19.1. *E es débilmente poroso y $\rho_{d,E}$ es duplicante.*

4.19.2. *Existe cierto $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1(X, d, \mu)$.*

Previo a considerar el aún más general Problema 3.16, procedemos a dar una demostración alternativa a 3.17.5 de que la familia $\Sigma_1(X, d, \mu)$ es cerrada por uniones finitas, a partir de los resultados obtenidos en esta sección.

Proposición 4.20. *Si $E_1, \dots, E_k \in \Sigma_1(X, d, \mu)$, se sigue que $E_1 \cup \dots \cup E_k \in \Sigma_1(X, d, \mu)$.*

Demostración. Basta considerar la unión $E_1 \cup E_2$ de dos conjuntos débilmente porosos en (X, d, μ) , con la propiedad que tanto ρ_{d,E_1} como ρ_{d,E_2} son duplicantes, y probar que $E_1 \cup E_2 \in \Sigma_1(X, d, \mu)$. Notemos que, para una d -bola arbitraria $B \subseteq X$, se cumple

$$\rho_{d,E_1 \cup E_2}(B) \leq \min\{\rho_{d,E_1}(B), \rho_{d,E_2}(B)\}.$$

Sean $0 < p_i, q_i < 1$ las constantes $0 < p, q < 1$ que figuran en el Lema 4.17 para los conjuntos E_i , $i = 1, 2$. Luego, si $0 < \varepsilon < \rho_{d,E_1 \cup E_2}(B)$, en particular ε es menor que $\rho_{d,E_1}(B)$ y $\rho_{d,E_2}(B)$, por lo que valen las estimaciones

$$\begin{aligned} \mu((E_1 \cup E_2)_\delta(p\varepsilon) \cap B) &\leq \mu((E_1)_\delta(p\varepsilon) \cap B) + \mu((E_2)_\delta(p\varepsilon) \cap B) \\ &\leq \mu((E_1)_\delta(p_1\varepsilon) \cap B) + \mu((E_2)_\delta(p_2\varepsilon) \cap B) \\ &\leq q_1 \mu((E_1)_\delta(\varepsilon) \cap B) + q_2 \mu((E_2)_\delta(\varepsilon) \cap B) \\ &\leq 2q \mu((E_1 \cup E_2)_\delta(\varepsilon) \cap B) \end{aligned}$$

donde $p = \min\{p_1, p_2\}$ y $q = \max\{q_1, q_2\}$, siendo que podemos suponer sin pérdida de la generalidad que¹⁹ q es menor que $\frac{1}{2}$. El enunciado se sigue al imitar los argumentos esgrimidos en la prueba del Teorema 4.18 para demostrar que existe cierto $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E_1 \cup E_2) \in A_1(X, d, \mu)$, para luego concluir por los Teoremas 4.14 y 4.15 que $E_1 \cup E_2$ es débilmente poroso con función de poro maximal duplicante, esto es, $E_1 \cup E_2 \in \Sigma_1(X, d, \mu)$. ■

¹⁹En efecto, podemos suponer que tanto p como q en 4.17.1 son arbitrariamente pequeños iterando como en la demostración de 4.17.2.

Caracterización de pesos distancia A_p en $\mathbb{R}^n$ y en espacios de tipo homogéneo

En este capítulo se obtienen múltiples caracterizaciones de la familia $\Sigma_p(X, d, \mu)$ que es solución al Problema 3.16. Los resultados más fuertes son obtenidos en el caso particular de $\mathbb{R}^n$, donde se demuestra además la equivalencia de éstos con la teoría desarrollada por M. Pasquariello & I. Uriarte-Tuero, autores que introdujeron la definición de conjuntos medianamente porosos. Una vez resuelto el problema en el caso euclídeo, se demostrará que alguna de las primeras caracterizaciones obtenidas pueden ser adaptadas a espacios de tipo homogéneo más generales. Asimismo, se verificará la concordancia entre la condición de porosidad en medianas y las propiedades de ejemplos previos de pesos distancia, que son ya sea pesos A_p o meramente pesos duplicantes, mediante un enfoque probabilístico sobre la distribución de poros de los conjuntos en estudio. Los resultados principales de este capítulo se encuentran en [Góm26].

Contenidos

5.1	Medidas de distribución de poros	115
5.2	Primera caracterización para pesos distancia A_p	124
5.3	Segunda caracterización para pesos distancia A_p	127
5.4	Equivalencia de la segunda caracterización con la condición de porosidad en medianas	132
5.5	Pesos distancia A_p en espacios de tipo homogéneo	138
5.6	Ejemplos	145

5.1 Medidas de distribución de poros

El estudio de los pesos distancia A_p con $p > 1$ es considerablemente más complejo que el caso A_1 debido a que la condición geométrica que ha de imponerse sobre los conjuntos asociados es significativamente más laxa y, por lo tanto, mucho más difícil de caracterizar. Por esta razón, nos enfocaremos principalmente en estudiar pesos A_p en el contexto de $\mathbb{R}^n$, donde será posible obtener una caracterización altamente reminiscente a la condición de porosidad débil. Las Secciones 5.1 a 5.4 están dedicadas exclusivamente al estudio del Problema 3.16 en el marco euclídeo. No será hasta la Sección 5.5 cuando indagaremos brevemente sobre qué propiedades de los pesos distancia

A_p pueden ser obtenidas en el contexto de un espacio de tipo homogéneo. Para finalizar, la Sección 5.6 está dedicada a probar que ciertos ejemplos provistos en [And+24; Mud25] cumplen con las caracterizaciones esbozadas en las primeras secciones de este capítulo.

Al igual que en el trabajo original de Anderson *et al.*, los cubos de $\mathbb{R}^n$ y sus particiones diádicas jugarán un papel crucial en las demostraciones de las próximas secciones. Por este motivo, es conveniente dar un repaso de algunas de las herramientas presentadas en el Capítulo 1. Recordemos que

$$Q(x, r) := [x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times [x_n - r, x_n + r)$$

es el cubo centrado en x con lado $l(Q) = 2r$. Cada cubo Q_0 admite una descomposición diádica

$$\mathcal{D}(Q_0) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}^j(Q_0),$$

donde $\mathcal{D}^j(Q_0)$ es la colección de los 2^{jn} cubos disjuntos Q con lados $l(Q) = 2^{-j}l(Q_0)$ y tales que $\bigcup_{Q \in \mathcal{D}^j(Q_0)} Q = Q_0$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Llamaremos (*sub*)cubos diádicos de Q_0 a los elementos de la familia $\mathcal{D}(Q_0)$ y (*sub*)cubos diádicos de j -ésima generación a los elementos de $\mathcal{D}^j(Q_0)$. Para dar a entender que Q es un subcubo diádico de la j -ésima generación, escribimos $\text{gen } Q = j$. Las siguientes propiedades son consecuencias directas de la definición de cubos diádicos de Q_0 :

- ◊ si $Q \in \mathcal{D}^j(Q_0)$ con $j \geq 1$, entonces existe un único cubo $\pi Q \in \mathcal{D}^{j-1}(Q_0)$ tal que $Q \subseteq \pi Q$. En palabras, πQ es el *padre diádico* de Q , mientras que Q es un *hijo diádico* de πQ ;
- ◊ todo $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ tiene exactamente 2^n hijos diádicos;
- ◊ dados $Q, P \in \mathcal{D}(Q_0)$ tales que $Q \cap P \neq \emptyset$, entonces o bien $Q \subseteq P$ o $P \subseteq Q$.

Dado un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$, en general será conveniente trabajar con la subfamilia compuesta por todos los subcubos diádicos de Q_0 que no intersecan con E y que son maximales con respecto a esta propiedad. En símbolos,

$$\mathcal{D}_E(Q_0) := \{Q \in \mathcal{D}(Q_0) : Q \cap \bar{E} = \emptyset \wedge \pi Q \cap \bar{E} \neq \emptyset\}.$$

Recordemos por otro lado que, dado un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y un cubo Q_0 , denotamos por $\mathcal{M}_E(Q_0)$ a alguno de los subcubos diádicos de Q_0 que satisfacen $Q \subseteq Q_0 \setminus E$ y que poseen mayor medida de Lebesgue. El poro maximal diádico $\mathcal{M}(Q_0)$ es una herramienta crucial en la equivalencia $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1$ si y solo si E es débilmente poroso. Esto se debe a que en la condición de porosidad débil la distribución global de los poros en Q_0 depende de esta cantidad, siendo que al mismo tiempo $l(\mathcal{M}(Q_0))^{-\alpha} \simeq \text{ess inf}_{Q_0} \text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$.

En nuestra breve exploración cualitativa del caso A_p en $\mathbb{R}^n$ (Sección 1.4 del Capítulo 1) vimos que la cantidad $l(\mathcal{M}(Q_0))$ pierde relevancia frente a nuevas herramientas que apuntan a describir el comportamiento de las fracciones de subcubos diádicos grandes y pequeños de $\mathcal{D}_E(Q_0)$. En las Secciones 5.1 a 5.4 veremos que efectivamente las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ introducidas en la Sección 1.4 son las herramientas adecuadas para una caracterización geométrica de los conjuntos en $\Sigma_p(\mathbb{R}^n, d, m)$, donde d es la métrica euclídea y m la medida de Lebesgue. Nuestro enfoque será constructivo: comenzaremos por estudiar en detalle la familia $\mathcal{D}_E(Q_0)$ y por qué las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ están bien definidas; discutiremos sus propiedades básicas y procederemos a obtener dos caracterizaciones de los pesos distancia A_p en términos de tales cantidades; por último compararemos la segunda caracterización con la condición de porosidad en medianas obtenida por M. Pasquariello & I. Uriarte-Tuero en [PU25], que destaca por ser altamente reminiscente con la condición de porosidad débil.

Los primeros resultados a establecer muestran que la familia $\mathcal{D}_E(Q_0)$ resulta ser una partición apropiada del conjunto $Q_0 \setminus \bar{E}$ que, en el caso que E tenga medida de Lebesgue nula, puede utilizarse para estimar el valor medio de cualquier peso distancia de la forma $\text{dist}(\cdot, E)^\theta$.

Lema 5.1. Si E es un conjunto cerrado y no vacío con $|E| = 0$ y Q_0 es un cubo tal que $Q_0 \cap E \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D}_E(Q_0)$ es una familia infinita de cubos diádicos disjuntos de a pares que además cumple

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} Q = Q_0 \setminus E.$$

Demostración. Dado que $|E| = 0$, el conjunto $Q_0 \setminus E$ es no vacío. Por lo tanto, para cada x perteneciente a este conjunto podemos encontrar, usando que E es cerrado, algún cubo $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ que contenga a x y tal que $Q \cap E = \emptyset$. Sea Q_x el mayor de los cubos con esta propiedad. Entonces, por maximalidad, $Q_x \in \mathcal{D}_E(Q_0)$. Esto muestra que $\mathcal{D}_E(Q_0) \neq \emptyset$ y

$$Q_0 \setminus E \subseteq \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} Q \subseteq Q_0 \setminus E.$$

Por otro lado, si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ son tales que $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, afirmamos que $Q_1 = Q_2$. Notemos que, debido a las propiedades de los cubos diádicos, o bien $Q_1 \subseteq Q_2$ o $Q_1 \supseteq Q_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $Q_1 \subsetneq Q_2$. Entonces, se sigue que $\pi Q_1 \subseteq Q_2$, pero en este caso

$$\emptyset \neq \pi Q_1 \cap E \subseteq Q_2 \cap E,$$

lo que contradice el hecho que $Q_2 \in \mathcal{D}_E(Q_0)$. Por lo tanto, la afirmación es válida.

Resta demostrar que $\mathcal{D}_E(Q_0)$ es una familia infinita. Supongamos, por el contrario, que $\mathcal{D}_E(Q_0) = \{Q_i\}_{i=1}^N$ y sea

$$m = \max_{1 \leq i \leq N} \text{gen}(Q_i).$$

Tomemos $y \in Q_0 \cap E$ y sea $Q^* \in \mathcal{D}(Q_0)$ el cubo tal que $y \in Q^*$ y $\text{gen}(Q^*) = m$. Consideremos ahora la intersección

$$Q^* \cap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq N} Q_i \right).$$

Si esta intersección fuese vacía, tendríamos que

$$Q^* \subseteq Q_0 \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq N} Q_i = Q_0 \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} Q = E,$$

por la primera parte de la prueba. Pero esto es una contradicción, ya que $|E| = 0 < |Q^*|$. Por lo tanto, debe existir algún $1 \leq i \leq N$ tal que $Q^* \cap Q_i \neq \emptyset$. Como $\text{gen}(Q^*) \geq \text{gen}(Q_i)$, esto implica que $y \in Q^* \subseteq Q_i$, lo cual nuevamente es una contradicción, puesto que $Q_i \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ y $y \in E$. En consecuencia, $\mathcal{D}_E(Q_0)$ contiene infinitos cubos diádicos. ■

En lo que sigue, será necesario usar la fórmula general

$$\int_Q \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx = C(n, \theta) |Q|^{1+\frac{\theta}{n}}$$

para evaluar integrales sobre cubos $Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)$. Para deducir dicha fórmula, la estrategia es reducir la integral a una expresión que involucre a la **función beta**

$$\beta(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

que es convergente para todo $p, q > 0$ [El 05]. A continuación, introducimos algo de notación adicional. En primer lugar, supongamos sin pérdida de generalidad que $Q = Q(0, r)$, en particular Q está centrado en el origen. Sea

$$Q^+(r) := \{x \in Q : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$$

y, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escribimos

$$Q_i^+(r) := \{x \in Q^+(r) : x_i \geq x_j, \forall j \neq i\}.$$

Observemos que $|Q_i^+(r) \cap Q_j^+(r)| \leq |\{x_i = x_j\}| = 0$ para todo par de índices $i \neq j$ y que $\bigcup_{i=1}^n Q_i^+(r) = Q^+(r)$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_Q \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx &= 2^n \int_{Q^+(r)} \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx \\ &= 2^n \sum_{i=1}^n \int_{Q_i^+(r)} \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx. \end{aligned}$$

Para $x \in Q$ se tiene $\text{dist}(x, \partial Q) = \min\{r - |x_1|, \dots, r - |x_n|\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{Q_1^+(r)} \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx &= \int_0^r \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_1} (r - x_1)^\theta dx_n \dots dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^r (r - x_1)^\theta x_1^{n-1} dx_1 \\ &= r^{n+\theta} \int_0^1 (1-t)^\theta t^{n-1} dt \\ &= r^{n+\theta} \beta(n, \theta + 1). \end{aligned}$$

Luego, si $\theta > -1$, la integral original sobre Q toma el valor $|Q|^{1+\frac{\theta}{n}}$ multiplicado por una constante C que depende de n y θ .

Lema 5.2. Fijo $\theta > -1$ y sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, no vacío y tal que $|E| = 0$. Entonces, existen constantes $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ que solo dependen de n y θ tales que

$$C_1 \sum_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} l(Q)^\theta \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq \int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^\theta dx \leq C_2 \sum_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} l(Q)^\theta \frac{|Q|}{|Q_0|}, \quad (5.1)$$

para todo cubo Q_0 que interseca con E . Más aún, la constante C_1 puede elegirse de forma tal que la primera desigualdad en (5.1) se cumple para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. Fijemos un cubo Q_0 tal que $Q_0 \cap E \neq \emptyset$. Si $\theta = 0$, entonces (5.1) se cumple con $C_1 = C_2 = 1$. Supongamos ahora que $-1 < \theta < 0$. Sea $Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)$. Dado que $Q \cap E = \emptyset$, se tiene

$$\int_Q \text{dist}(x, E)^\theta dx \leq \int_Q \text{dist}(x, \partial Q)^\theta dx = C_2(n, \theta) |Q|^{1+\frac{\theta}{n}} = C_2(n, \theta) l(Q)^\theta |Q|,$$

donde la hipótesis $\theta > -1$ es necesaria para garantizar que la segunda integral sea finita. Por otro lado, si $y \in Q$, como $\pi Q \cap E \neq \emptyset$, se sigue que

$$\text{dist}(y, E) \leq \text{diam}(\pi Q) = C(n) l(Q),$$

y por lo tanto

$$\text{dist}(y, E)^\theta \geq C_1(n, \theta) |Q|^{\frac{\theta}{n}}.$$

Esto muestra que

$$\int_Q \text{dist}(x, E)^\theta dx \geq C_1(n, \theta) |Q|^{\frac{\theta}{n}} \int_Q dx = C_1(n, \theta) |Q|^{1+\frac{\theta}{n}} = C_1(n, \theta) l(Q)^\theta |Q|,$$

lo cual es válido incluso para $\theta \leq -1$. Recordando que $|E| = 0$, podemos combinar las estimaciones anteriores con el hecho que

$$\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^\theta dx = \int_{Q_0 \setminus E} \text{dist}(x, E)^\theta dx = \sum_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} |Q_0|^{-1} \int_Q \text{dist}(x, E)^\theta dx$$

para obtener fácilmente (5.1). El caso $\theta > 0$ se sigue de manera análoga. ■

La siguiente definición introduce los subconjuntos de la recta utilizados para la definición de las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$. Las propiedades básicas de estos conjuntos son estudiadas en la [Proposición 5.4](#) que inmediatamente le sucede.

Definición 5.3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Dado un cubo Q_0 tal que $Q_0 \cap \bar{E} \neq \emptyset$ y dado $t \in (0, 1)$, definimos los conjuntos

$$\mathcal{L}(t, Q_0, E) = \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}$$

y

$$\mathcal{S}(t, Q_0, E) = \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq L}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \right\}.$$

Proposición 5.4. Sea E un conjunto cerrado y no vacío con $|E| = 0$. Si $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cubo que interseca E , entonces valen las siguientes afirmaciones.

5.4.1. Para todo $t \in (0, 1)$, $\mathcal{L}(t, Q_0, E) = [0, L_t]$ donde $0 < L_t \leq l(\mathcal{M}(Q_0))$. En particular, $\mathcal{L}(t, Q_0, E)$ es un intervalo cerrado que contiene al cero.

5.4.2. Para todo $t \in (0, 1)$, $\mathcal{S}(t, Q_0, E) = [L'_t, \infty)$ donde $0 < L'_t \leq l(\mathcal{M}(Q_0))$. En particular, $\mathcal{S}(t, Q_0, E)$ es una semirrecta a derecha.

5.4.3. Si $0 < s \leq t < 1$, entonces $\mathcal{L}(t, Q_0, E) \subseteq \mathcal{L}(s, Q_0, E)$ y $\mathcal{S}(t, Q_0, E) \subseteq \mathcal{S}(s, Q_0, E)$.

Demostración. Para probar 5.4.1, comencemos por observar que, dado que

$$\sum_{l(Q) \geq 0} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1,$$

se tiene $0 \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$ para todo $t \in (0, 1)$. Además, si $L \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$ y $0 \leq L^* \leq L$, entonces

$$\sum_{l(Q) \geq L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq \sum_{l(Q) \geq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t,$$

lo que implica $L^* \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$, esto es, $\mathcal{L}(t, Q_0, E)$ es un intervalo. Definamos ahora

$$L_t := \sup \mathcal{L}(t, Q_0, E).$$

Verifiquemos que $L_t > 0$. Para ello, consideremos una sucesión $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tal que $l_n \searrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Observemos que, si definimos

$$\mathcal{Q}_n := \{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : l(Q) \geq l_n\},$$

entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n = \{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : l(Q) > 0\} = \mathcal{D}_E(Q_0).$$

Por lo tanto, recordando que $|E| = 0$, podemos aplicar el [Lema 5.1](#) para obtener

$$|Q_0| = |Q_0 \setminus E| = \left| \bigcup_{Q \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_n} Q \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n} Q \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{l(Q) \geq l_n} Q \right|.$$

Esto significa que, para todo $t \in (0, 1)$ fijo, podemos elegir n suficientemente grande de modo que

$$\sum_{l(Q) \geq l_n} \frac{|Q|}{|Q_0|} = |Q_0|^{-1} \left| \bigcup_{l(Q) \geq l_n} Q \right| \geq t,$$

y por lo tanto $L_t \geq l_n > 0$.

Para ver que $\mathcal{L}(t, Q_0, E)$ es cerrado, basta verificar que $L_t \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$. Con este fin, observamos que

$$\mathcal{L}(t, Q_0, E) \cap \{2^{-k}l(Q_0)\}_{k \in \mathbb{N}_0} = \{2^{-k}l(Q_0)\}_{k \geq k_0},$$

para algún entero no negativo k_0 . De hecho, notemos que $k_0 > 0$, ya que la condición $Q_0 \cap E \neq \emptyset$ implica que

$$l(Q) \leq \frac{1}{2} l(Q_0), \text{ para todo } Q \in \mathcal{D}_E(Q_0).$$

Afirmamos que $2^{-k_0}l(Q_0) = L_t$. En efecto, supongamos que existe $L > 0$ tal que

$$2^{-k_0}l(Q_0) < L \in \mathcal{L}(t, Q_0, E).$$

Entonces, necesariamente $L < 2^{-k_0+1}l(Q_0)$, ya que de lo contrario tendríamos que $2^{-k_0+1}l(Q_0) \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$, contradiciendo la hipótesis sobre k_0 . Pero como no existen cubos diádicos con longitudes de lado comprendidas entre $2^{-k_0}l(Q_0)$ y $2^{-k_0+1}l(Q_0)$,

$$\sum_{l(Q) \geq 2^{-k_0+1}l(Q_0)} \frac{|Q|}{|Q_0|} = \sum_{l(Q) \geq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t,$$

lo que implica $2^{-k_0+1}l(Q_0) \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$, que nuevamente es una contradicción. Por lo tanto,

$$2^{-k_0}l(Q_0) = \max \mathcal{L}(t, Q_0, E) = L_t,$$

y $\mathcal{L}(t, Q_0, E)$ es cerrado. Finalmente, notemos que

$$L_t \leq l(\mathcal{M}(Q_0)) + \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$

dado que

$$\sum_{l(Q) \geq l(\mathcal{M}(Q_0)) + \varepsilon} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 0,$$

y por ende $L_t \leq l(\mathcal{M}(Q_0))$.

La prueba de 5.4.2 puede obtenerse mediante argumentos similares a los anteriores. Dado que

$$\sum_{l(Q) \leq l(\mathcal{M}(Q_0))} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1,$$

se tiene $l(\mathcal{M}(Q_0)) \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$ para todo $t \in (0, 1)$. Además, si $L \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$ y $L^* \geq L$, entonces

$$\sum_{l(Q) \leq L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq \sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t,$$

lo que implica $L^* \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$. Esto prueba que $\mathcal{S}(t, Q_0, E)$ es un intervalo que contiene $[l(\mathcal{M}(Q_0)), \infty)$. Para ver que $L'_t := \inf \mathcal{S}(t, Q_0, E) > 0$ para todo $t \in (0, 1)$, observemos que la igualdad

$$\sum_{l(Q) \leq l(\mathcal{M}(Q_0))} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1$$

implica que

$$\sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } L \rightarrow 0^+.$$

Por lo tanto, podemos elegir $L > 0$ suficientemente pequeño de modo que

$$\sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} < t,$$

y así $L'_t > L > 0$. Para verificar que $\mathcal{S}(t, Q_0, E)$ contiene su extremo inferior L'_t , observamos primero que

$$\mathcal{S}(t, Q_0, E) \cap \{2^{-k}l(\mathcal{M}(Q_0))\}_{k \in \mathbb{N}_0} = \{2^{-k}l(\mathcal{M}(Q_0))\}_{k \leq k_0}$$

para algún entero no negativo k_0 . Afirmamos que $2^{-k_0}l(\mathcal{M}(Q_0)) = L'_t$. En efecto, supongamos que existe $L > 0$ tal que

$$2^{-k_0}l(\mathcal{M}(Q_0)) > L \in \mathcal{S}(t, Q_0, E).$$

Entonces $L > 2^{-k_0-1}l(\mathcal{M}(Q_0))$, ya que de lo contrario se tendría $2^{-k_0-1}l(\mathcal{M}(Q_0)) \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$, contradiciendo la hipótesis sobre k_0 . Dado que no existen cubos diádicos con longitudes de lado contenidas en el intervalo $(2^{-k_0-1}l(\mathcal{M}(Q_0)), 2^{-k_0}l(\mathcal{M}(Q_0)))$, se tiene

$$\sum_{l(Q) \leq 2^{-k_0-1}l(\mathcal{M}(Q_0))} \frac{|Q|}{|Q_0|} = \sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t,$$

lo que implica $2^{-k_0-1}l(\mathcal{M}(Q_0)) \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$, nuevamente una contradicción. Por lo tanto,

$$L'_t = 2^{-k_0}l(\mathcal{M}(Q_0)) = \min \mathcal{S}(t, Q_0, E).$$

Finalmente, para probar 5.4.3, basta observar que si $s \leq t$ y $L \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$, entonces

$$\sum_{l(Q) \geq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \geq s,$$

por lo que $L \in \mathcal{L}(s, Q_0, E)$. De manera análoga, si $L \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$, entonces

$$\sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \geq s,$$

lo que implica que $L \in \mathcal{S}(s, Q_0, E)$. ■

Definición 5.5. Fijos un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|\bar{E}| = 0$ y un cubo Q que interseca $\bar{E}$, introducimos las funciones $\mathcal{L}_Q : (0, 1) \rightarrow (0, l(\mathcal{M}(Q))]$ y $\mathcal{S}_Q : (0, 1) \rightarrow (0, l(\mathcal{M}(Q))]$ dadas por

$$\mathcal{L}_Q(t) := \max \mathcal{L}(t, Q, E)$$

y

$$\mathcal{S}_Q(t) := \min \mathcal{S}(t, Q, E).$$

Gracias al estudio de los conjuntos $\mathcal{L}(t, Q_0, E)$ y $\mathcal{S}(t, Q_0, E)$, las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ se hallan ahora bien definidas en términos de máximos y mínimos, a diferencia de la definición preliminar presentada en el [Capítulo 1](#), donde se habían utilizado supremos e ínfimos. Por otro lado, debido a [5.4.3](#), también sabemos que $\mathcal{L}_Q$ es no creciente mientras que $\mathcal{S}_Q$ es no decreciente, y que estas funciones solo toman valores discretos de la forma $2^{-k}l(\mathcal{M}(Q))$, aunque por lo general no será necesario recurrir a este hecho.

La heurística detrás la función $\mathcal{L}_{Q_0}$ (respectivamente, $\mathcal{S}_{Q_0}$) es que evaluada en t asigna la mayor (menor) longitud de lado entre aquellas longitudes asociadas a los poros que, en conjunto, constituyen una fracción t del volumen total de $Q_0 \setminus \bar{E}$. En otras palabras, estas funciones están asociadas a las t -medianas de la distribución de poros en Q_0 con respecto a E . Los siguientes resultados establecen algunas propiedades básicas adicionales.

Proposición 5.6. Sea E un conjunto cerrado, no vacío y tal que $|E| = 0$. Si $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cubo que interseca E , entonces para todo $0 < t < 1$,

$$\sum_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \quad y \quad \sum_{l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t \quad (5.2)$$

mientras que

$$\sum_{l(Q) < \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq 1 - t \quad y \quad \sum_{l(Q) > \mathcal{S}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq 1 - t. \quad (5.3)$$

Demostración. Ambas desigualdades en (5.2) se siguen trivialmente del hecho que $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$ y $\mathcal{S}_{Q_0}(t) \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$. Las desigualdades en (5.3) involucran las medidas de conjuntos complementarios a los propios de (5.2), por lo que basta observar que

$$\sum_{l(Q) < \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1 - \sum_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq 1 - t$$

y

$$\sum_{l(Q) > \mathcal{S}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1 - \sum_{l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq 1 - t. \quad \blacksquare$$

Lema 5.7. Dado un conjunto cerrado y no vacío E con $|E| = 0$ y un cubo Q_0 tal que $Q_0 \cap E \neq \emptyset$, entonces

5.7.1. $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \in \mathcal{S}(1-t, Q_0, E)$ para todo $t \in (0, 1)$. En particular, $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$ para $0 < t < 1$;

5.7.2. $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ poseen los comportamientos límite

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{L}_{Q_0}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_{Q_0}(t) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_{Q_0}(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{S}_{Q_0}(t) = l(\mathcal{M}(Q_0)).$$

Demostración. Fijemos un cubo Q_0 como en el enunciado y tomemos $t \in (0, 1)$. Tenemos que

$$\left| \bigcup_{l(Q) > \mathcal{L}_{Q_0}(t)} Q \right| = \left| \bigcup_{\varepsilon > 0} \left(\bigcup_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t) + \varepsilon} Q \right) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t) + \varepsilon} |Q| \leq t|Q_0|,$$

donde la última desigualdad se cumple dado que $\mathcal{L}_{Q_0}(t) = \max \mathcal{L}(t, Q_0, E)$. De aquí se deduce que

$$\sum_{l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1 - \sum_{l(Q) > \mathcal{L}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq 1 - t,$$

y por lo tanto $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \in \mathcal{S}(1-t, Q_0, E)$. Esto prueba 5.7.1.

Por otro lado, dado que $\mathcal{L}_{Q_0}$ es no creciente en $(0, 1)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{L}_{Q_0}(t) = L^*$ para cierto $L^* \geq 0$. Esto significa que

$$\sum_{l(Q) \geq L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t$$

para todo $0 < t < 1$, lo cual implica

$$\sum_{l(Q) \geq L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1.$$

Si tuviéramos que $L^* > 0$, dado que $\mathcal{D}_E(Q_0)$ es una familia infinita, podríamos elegir $Q_1 \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ tal que $l(Q_1) < L^*$ y, en consecuencia,

$$\sum_{l(Q) \geq L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} = 1 - \sum_{l(Q) < L^*} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_0|} < 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente $L^* = 0$ y, por 5.7.1,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_{Q_0}(t) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_{Q_0}(1-t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{L}_{Q_0}(t) = 0.$$

Por otro lado, si definimos $s := \sum_{l(Q) \leq \frac{1}{2}l(\mathcal{M}(Q_0))} \frac{|Q|}{|Q_0|}$, entonces $s \in (0, 1)$ y $\mathcal{S}_{Q_0}(t) = l(\mathcal{M}(Q_0))$ para todo $s < t < 1$. Finalmente, usando 5.7.1 nuevamente, obtenemos

$$l(\mathcal{M}(Q_0)) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_{Q_0}(t) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_{Q_0}(1-t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{S}_{Q_0}(t) = l(\mathcal{M}(Q_0)).$$

■

5.2 Primera caracterización para pesos distancia A_p

En esta sección presentamos una primera caracterización de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ asociados a pesos distancia A_p . Las implicaciones de esta equivalencia se demuestran de forma separada en los Teoremas 5.8 y 5.9, donde se observa la relevancia de las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ en este contexto.

Teorema 5.8. *Sea E un conjunto cerrado y no vacío y supongamos que existe cierto $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_p(\mathbb{R}^n)$ para algún $1 < p < \infty$. Entonces, existen constantes positivas $\sigma = \sigma(\alpha, p)$ y $C_0 = C_0(n, \alpha, p, [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_p(\mathbb{R}^n)})$ tales que*

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{C_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t) \quad (5.4)$$

para todo cubo Q_0 que interseca a E y todo $t \in (0, 1)$.

Demostración. Si $w(x) = \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$, dado que $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$, en particular w es localmente integrable. Pero como $w(x) = \infty$ para todo $x \in E$, necesariamente se tiene que $|E| = 0$, y por lo tanto las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ están bien definidas. Sea $t \in (0, 1)$. Usando la condición A_p de w sobre Q_0 , junto con el Lema 5.2 y las propiedades de $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$, se obtiene

$$\begin{aligned} [\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_p(\mathbb{R}^n)} &\geq \left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \right) \left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{p-1} \\ &\geq C(n, \alpha, p) \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \left(\sum_{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)} l(Q)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^{p-1} \\ &\geq C(n, \alpha, p) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)}} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)}} l(Q)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^{p-1} \\ &\geq C(n, \alpha, p) \mathcal{S}_{Q_0}(t)^{-\alpha} \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \mathcal{L}_{Q_0}(t)^\alpha \left(\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^{p-1} \\ &\geq C(n, \alpha, p) t^p \mathcal{S}_{Q_0}(t)^{-\alpha} \mathcal{L}_{Q_0}(t)^\alpha, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (5.2). A partir de esto, se obtiene fácilmente (5.4) con $\sigma = \frac{p}{\alpha}$ y donde C_0 es una constante que depende de n, α, p y de $[\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_p(\mathbb{R}^n)}$. ■

El recíproco del teorema anterior viene dado por el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Sea E un conjunto cerrado y no vacío con $|E| = 0$ tal que existen constantes $\sigma, C_0 > 0$ para las cuales se cumple*

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{C_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t)$$

para todo cubo Q_0 que interseca a E y todo $t \in (0, 1)$. Entonces, para todo $1 < p < \infty$ tenemos que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_p$ siempre que $0 < \alpha < \min\{\sigma^{-1}, (p-1)\sigma^{-1}\}$.

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$. Buscamos constantes $\alpha, C > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \right) \left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C$$

se verifique para todo cubo $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. A este fin, consideramos tres casos de forma separada.

Caso I ($Q_0 \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(Q_0, E) \geq 2 \text{diam}(Q_0)$): en este caso, puede demostrarse que, si x_0 es un punto dado en Q_0 , entonces

$$\frac{1}{2} \text{dist}(x_0, E) \leq \text{dist}(x, E) \leq 2 \text{dist}(x_0, E)$$

para todo $x \in Q_0$. Por lo tanto, para cualquier elección de $\alpha > 0$ se tiene

$$\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq 2^\alpha \text{dist}(x_0, E)^{-\alpha},$$

y

$$\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \leq 2^{\frac{\alpha}{p-1}} \text{dist}(x_0, E)^{\frac{\alpha}{p-1}},$$

lo que implica que

$$\left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \right) \left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq 4^\alpha.$$

Caso II ($Q_0 \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(Q_0, E) < 2 \text{diam}(Q_0)$): observemos que $4Q_0 \cap E \neq \emptyset$, donde $4Q_0$ denota el cubo con el mismo centro que Q_0 y tal que $l(4Q_0) = 4l(Q_0)$. Suponiendo ahora que la condición A_p se verifica para algún $\alpha > 0$ y con una constante $C > 0$ para todo cubo que interseca a E , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq 4^n \int_{4Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \\ &\leq 4^n C \left(\int_{4Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{1-p} \leq C(n, p) \left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{1-p}. \end{aligned}$$

Luego, la prueba de este caso se reduce a demostrar el Caso III.

Caso III ($Q_0 \cap E \neq \emptyset$): sea $0 < \alpha < 1$ a elegir más adelante. Comencemos por escribir

$$\mathcal{D}_E(Q_0) = \{Q : l(Q) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{Q : \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}}) \leq l(Q) < \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})\}.$$

Notemos que esta igualdad se justifica por el comportamiento límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_{Q_0}(t) = 0,$$

enunciado en 5.7.2. Esto permite obtener la estimación

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq \\ &C(n, \alpha) \left[\sum_{l(Q) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}}) \leq l(Q) < \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Para el primer término entre corchetes se tiene

$$\sum_{l(Q) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} \leq \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha} \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha},$$

donde se utilizó 5.7.1 para obtener la última desigualdad. Este mismo inciso del Lema 5.7, junto con (5.3), permite obtener una estimación análoga para el término restante:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}}) \leq l(Q) < \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} l(Q)^{-\alpha} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \\
 & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})^{-\alpha} \sum_{l(Q) < \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, C_0) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)} \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})^{-\alpha} \sum_{l(Q) < \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, C_0) \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)} \sum_{l(Q) < \mathcal{L}_{Q_0}(1-\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, C_0) \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)-k} \\
 & = C(\alpha, \sigma, C_0) \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha\sigma-1)} \\
 & = C(\alpha, \sigma, C_0) \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha},
 \end{aligned}$$

siempre que $\alpha < \sigma^{-1}$. Hemos demostrado que, para estos valores de α , la integral $\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx$ está acotada por una constante multiplicada por $\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{-\alpha}$. Resta demostrar que además

$$\left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\alpha}$$

para α suficientemente pequeño. Para ello, consideramos ahora la partición

$$\mathcal{D}_E(Q_0) = \{Q : l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{Q : \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k}) < l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})\}.$$

Para k suficientemente grande, los conjuntos $\{\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k}) < l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})\}$ son eventualmente vacíos, aunque esto no afecta la demostración. Al igual que antes, partimos la integral en cuestión según

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \leq \\
 & C(n, \alpha, p) \left[\sum_{l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})} l(Q)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{|Q|}{|Q_0|} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k}) < l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})} l(Q)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \right].
 \end{aligned}$$

El primer término es claramente menor o igual que $\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}}$. Para el segundo término, utilizando

nuevamente el Lema 5.7 y la Proposición 5.6, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k}) < l(Q) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})} l(Q)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \right) \\
 & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{l(Q) > \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, p, C_0) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{\alpha\sigma}{p-1}(k+1)} \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2^{k+1}})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{l(Q) > \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, p, C_0) \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{\alpha\sigma}{p-1}(k+1)} \sum_{l(Q) > \mathcal{S}_{Q_0}(1-\frac{1}{2^k})} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\
 & \leq C(\alpha, p, \sigma, C_0) \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\frac{\alpha\sigma}{p-1}-1)} \\
 & \leq C(\alpha, p, \sigma, C_0) \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}}
 \end{aligned}$$

si tomamos $\alpha < (p-1)\sigma^{-1}$. De aquí se deduce que

$$\left(\int_{Q_0} \text{dist}(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C \mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2})^{\alpha},$$

como debía ser demostrado. ■

5.3 Segunda caracterización para pesos distancia A_p

Podríamos afirmar que la caracterización obtenida en la sección anterior es de carácter continuo, en el sentido que involucra comparaciones entre las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ evaluadas en t para todo t en el intervalo unidad. Es esta continuidad en el parámetro t la que permite demostrar de forma relativamente directa la equivalencia con la condición A_p de los pesos distancia en los Teoremas 5.8 y 5.9. En cierto sentido, esto no resulta análogo al caso $p = 1$, donde la condición de porosidad débil consta de una única comparación del tamaño de los poros en Q_0 , y donde es necesario aplicar iterativamente esta condición para relacionarla con la condición A_1 .

Nuestro objetivo en esta sección es obtener una segunda caracterización que conste de la comparación de las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$ en único valor del parámetro. Más precisamente, queremos ver que es suficiente garantizar la existencia de un único valor $s \in (0, 1)$ tal que

$$\mathcal{L}_{Q_0}(s) \leq C_0 \mathcal{S}_{Q_0}(s) \tag{5.5}$$

para todo cubo Q_0 que interseque con $\bar{E}$. En particular, no estamos pidiendo que el conjunto E tenga medida de Lebesgue nula (que era una hipótesis recurrente en resultados anteriores), tan solo que las respectivas funciones estén bien definidas y cumplan una desigualdad del tipo (5.5).

Proposición 5.10. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado y no vacío y supongamos que existen constantes $0 < s < 1$ y $C_0 > 0$ tales que (5.5) se cumple para todo cubo Q_0 que interseca a E . Entonces, $|E| = 0$.*

Demostración. Supongamos que Q_0 es un cubo que interseca con E . Dado que (5.5) es válida, los conjuntos $\mathcal{L}(s, Q_0, E)$ y $\mathcal{S}(s, Q_0, E)$ son no vacíos. En consecuencia, podemos tomar cualquier valor $L \in \mathcal{L}(s, Q_0, E)$ y deducir que

$$|E \cap Q_0| = |Q_0 \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)| \leq \left| Q_0 \setminus \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq L}} Q \right| \leq (1-s)|Q_0|.$$

Observemos que la cota $|E \cap Q_0| \leq (1-s)|Q_0|$ también vale trivialmente en el caso en que $Q_0 \cap E = \emptyset$. Por lo tanto, si $\mathbb{1}_E$ denota la función característica de E , entonces por el Teorema de diferenciación de Lebesgue se sigue que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{1}_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{Q(x,r)} \mathbb{1}_E(y) dy = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|E \cap Q(x,r)|}{|Q(x,r)|} \leq (1-s) < 1.$$

Por lo tanto, $|E| = 0$. ■

Para probar la equivalencia entre (5.5) y la condición A_p de los pesos distancia asociados, la estrategia consiste en verificar que esta desigualdad equivale a la caracterización hallada en la sección previa, lo que se demuestra en los siguientes dos lemas.

Lema 5.11. *Dado un conjunto cerrado E con $|E| = 0$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

5.11.1. *Existen constantes $\sigma, C_0 > 0$ tales que para todo cubo Q_0 que interseca a E y todo $t \in (0, 1)$,*

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{C_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t).$$

5.11.2. *Existen constantes $\sigma, C'_0 > 0$ y $0 < t' < \frac{1}{2}$ tales que para todo cubo Q_0 que interseca a E y todo $0 < t \leq t'$,*

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{C'_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t).$$

Demostración. La implicación 5.11.1 $\implies$ 5.11.2 es inmediata. Para ver que 5.11.2 $\implies$ 5.11.1, sea $t' < t < 1$, entonces

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(t') \leq \frac{C'_0}{(t')^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t') \leq \frac{C'_0}{(tt')^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t') \leq \frac{C_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t)$$

donde $C_0 := C'_0(t')^{-\sigma}$. ■

En lo que sigue, para $Q \in \mathcal{D}^k(Q_0)$, definimos $\pi_0 Q := Q$ y $\pi_j Q := \pi(\pi_{j-1} Q)$ para $1 \leq j \leq k$. Notemos que, en particular, $\pi_k Q = Q_0$. Por otro lado, observemos que si $Q_0 \cap \bar{E} \neq \emptyset$ y $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ es un subcubo diádico de Q_0 que también cumple $Q \cap \bar{E} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D}_E(Q) \subseteq \mathcal{D}_E(Q_0)$, esto es, ambas grillas diádicas son compatibles.

Lema 5.12. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

5.12.1. $|E| = 0$ y existen constantes $\tilde{\sigma}, \tilde{C}_0 > 0$ para las cuales se cumple

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{\tilde{C}_0}{t^{\tilde{\sigma}}} \mathcal{S}_{Q_0}(t)$$

para todo cubo Q_0 que interseca a E y todo $t \in (0, 1)$.

5.12.2. Existen $C_0 > 0$ y $0 < s < (1 + 2^n)^{-1}$ tales que se satisface (5.5) para todo cubo $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ que interseca a E .

Demostración. Claramente, 5.12.1 implica 5.12.2, por lo que centramos nuestra atención en la implicación restante. Fijemos un cubo Q_0 en $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < t \leq s$. Después de todo, por el Lema 5.11, es suficiente probar la desigualdad

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{C_0}{t^\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t)$$

para valores de t en $(0, s]$. De acuerdo con nuestra hipótesis, se tiene que $\mathcal{L}_{Q_0}(s) \leq C_0 \mathcal{S}_{Q_0}(s)$. Pero dado que $\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{2}) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(\frac{1}{2})$ por el Lema 5.7 y recordando que $\mathcal{L}_{Q_0}$ es no creciente mientras que $\mathcal{S}_{Q_0}$ es no decreciente, se sigue que $\mathcal{L}_{Q_0}(s) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(s)$ y necesariamente $C_0 \geq 1$.

A continuación, afirmamos que

$$\mathcal{S}_{Q_0}(s) \leq C_0 \left(\frac{s}{t}\right)^\sigma \mathcal{S}_{Q_0}(t)$$

para algún $\sigma > 0$. Si $\mathcal{S}_{Q_0}(t) = \mathcal{S}_{Q_0}(s)$, no hay nada que probar (dado que $C_0 \geq 1$), por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{S}_{Q_0}(t) < \mathcal{S}_{Q_0}(s)$. Notemos que

$$t \leq \sum_{l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)} \frac{|Q|}{|Q_0|} < s \quad (5.6)$$

donde la segunda desigualdad se deduce del hecho de que $\mathcal{S}_{Q_0}(t) < \mathcal{S}_{Q_0}(s) = \min \mathcal{S}(s, Q_0, E)$ y, por lo tanto, $\mathcal{S}_{Q_0}(t) \notin \mathcal{S}(s, Q_0, E)$.

Sea $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t)\}$ para algún conjunto de índices apropiado A . Dado $\alpha \in A$, se tiene que $Q_\alpha \in \mathcal{D}^k(Q_0)$ para alguna generación $k = k(\alpha)$, por lo que podemos definir el índice

$$J_\alpha := \max \left\{ j \in \{0, \dots, k\} : \frac{|\pi_j Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|\pi_j Q_\alpha|} \geq s \right\}.$$

Por (5.6), tenemos que

$$\frac{|\pi_k Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|\pi_k Q_\alpha|} = \frac{|\bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|Q_0|} < s.$$

Esto implica $J_\alpha < k$. Además,

$$\frac{|\pi_0 Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|\pi_0 Q_\alpha|} = \frac{|Q_\alpha|}{|Q_\alpha|} = 1$$

y

$$\frac{|\pi_1 Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|\pi_1 Q_\alpha|} \geq \frac{|Q_\alpha|}{|\pi_1 Q_\alpha|} = \frac{1}{2^n} \geq s,$$

de donde se deduce que $J_\alpha \geq 1$. En particular, $\pi_{J_\alpha} Q_\alpha \subseteq \pi_{J_\alpha} Q_\alpha$ y, por lo tanto, $\pi_{J_\alpha} Q_\alpha \cap E \neq \emptyset$. Ver Figura 5.1 para una representación esquemática de los cubos $\pi_{J_\alpha} Q_\alpha$. Podemos observar también que, dado que $\pi_{J_\alpha+1} Q_\alpha$ está bien definido,

$$\frac{|\pi_{J_\alpha} Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta} Q_\beta|}{|\pi_{J_\alpha} Q_\alpha|} \leq \frac{|\pi_{J_\alpha+1} Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta} Q_\beta|}{|\pi_{J_\alpha} Q_\alpha|} = 2^n \frac{|\pi_{J_\alpha+1} Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta} Q_\beta|}{|\pi_{J_\alpha+1} Q_\alpha|} < 2^n s.$$

Luego,

$$|\pi_{J_\alpha} Q_\alpha \cap \bigcup_{\beta} Q_\beta| < 2^n s |\pi_{J_\alpha} Q_\alpha|.$$

Denotando $P_\alpha := \pi_{J_\alpha} Q_\alpha$, y dado que $P_\alpha \cap P_\beta \neq \emptyset$ si y solo si $P_\alpha \subseteq P_\beta$ o $P_\beta \subseteq P_\alpha$, podemos encontrar un nuevo conjunto de índices Γ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha \quad \text{y} \quad P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset \quad \text{para todo } \alpha \neq \beta \in \Gamma.$$

En otras palabras, Γ se elige de modo que $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ sea la subcolección maximal de $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Usando la propiedad de disjunción por pares de la colección $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, obtenemos

$$\left| \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta \right| = \left| \bigcup_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta \right| = \sum_{\alpha \in \Gamma} \left| P_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta \right| < 2^n s \sum_{\alpha \in \Gamma} |P_\alpha| = 2^n s \left| \bigcup_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha \right|. \quad (5.7)$$

Ahora, para $\alpha \in \Gamma$ fijo, tenemos que

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(P_\alpha) \\ l(Q) \leq S_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|P_\alpha|} = \sum_{\beta \in A: Q_\beta \subseteq P_\alpha} \frac{|Q_\beta|}{|P_\alpha|} = \frac{|P_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in A} Q_\beta|}{|P_\alpha|} \geq s,$$

por definición de P_α . En consecuencia, $S_{Q_0}(t) \in \mathcal{S}(s, P_\alpha, E)$ y, por lo tanto,

$$S_{Q_0}(t) \geq S_{P_\alpha}(s) \geq C_0^{-1} \mathcal{L}_{P_\alpha}(s) \geq C_0^{-1} S_{P_\alpha}(1-s),$$

usando 5.12.2 aplicado al cubo P_α . Esto implica que $C_0 S_{Q_0}(t) \in \mathcal{S}(1-s, P_\alpha, E)$ y

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(P_\alpha) \\ l(Q) \leq C_0 S_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|P_\alpha|} \geq 1-s.$$

Observando que $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{D}_E(P_\alpha) \subseteq \mathcal{D}_E(Q_0)$ y usando (5.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq C_0 S_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|Q_0|} &\geq \sum_{\alpha \in \Gamma} \frac{|P_\alpha|}{|Q_0|} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(P_\alpha) \\ l(Q) \leq C_0 S_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|P_\alpha|} \geq (1-s) \sum_{\alpha \in \Gamma} \frac{|P_\alpha|}{|Q_0|} \\ &= (1-s) \frac{|\bigcup_{\alpha \in \Gamma} P_\alpha|}{|Q_0|} \\ &\geq \frac{(1-s)}{2^n s} \frac{|\bigcup_{\alpha \in A} Q_\alpha|}{|Q_0|} \\ &= \frac{(1-s)}{2^n s} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq S_{Q_0}(t)}} \frac{|Q|}{|Q_0|} \\ &\geq \frac{(1-s)t}{2^n s}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad implica que $S_{Q_0}(t) \geq C_0^{-1} S_{Q_0}(ct)$, donde $c := \frac{(1-s)}{2^n s}$. Como $s < \frac{1}{2^n + 1}$, la constante c es estrictamente mayor que uno y $0 < ct < 1$ para todo $t \leq s$. Sea m el entero tal que $c^{m-1}t < s \leq c^m t$ o, equivalentemente, $m-1 < \frac{\log \frac{s}{t}}{\log c} \leq m$. Entonces,

$$S_{Q_0}(t) \geq C_0^{-1} S_{Q_0}(ct) \geq \dots \geq C_0^{-m} S_{Q_0}(c^m t) \geq C_0^{-m} S_{Q_0}(s).$$

Luego,

$$S_{Q_0}(s) \leq C_0^m S_{Q_0}(t) \leq C_0^{1 + \frac{\log \frac{s}{t}}{\log c}} S_{Q_0}(t) = C_0 \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{\log C_0}{\log c}} S_{Q_0}(t).$$

Notemos que, si se tuviera que $C_0 = 1$, entonces los cálculos anteriores muestran que

$$0 < \mathcal{S}_{Q_0}(s) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+,$$

por lo que C_0 debe ser en realidad estrictamente mayor que 1. De este modo, la afirmación original queda demostrada con $\sigma := \frac{\log C_0}{\log c} > 0$.

Ahora, afirmamos que

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq C_0 \left(\frac{s}{t} \right)^\sigma \mathcal{L}_{Q_0}(s),$$

para todo $0 < t \leq s$ y el mismo valor de $\sigma = \frac{\log C_0}{\log c}$, lo cual puede demostrarse exactamente de la misma manera que la afirmación anterior, y por lo tanto omitimos la demostración. Combinando ambas afirmaciones, obtenemos

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq C_0 \left(\frac{s}{t} \right)^\sigma \mathcal{L}_{Q_0}(s) \leq C_0^2 \left(\frac{s}{t} \right)^\sigma \mathcal{S}_{Q_0}(s) \leq C_0^3 \left(\frac{s}{t} \right)^{2\sigma} \mathcal{S}_{Q_0}(t),$$

lo que prueba el teorema con $\tilde{C}_0 = C_0^3 > 0$ y $\tilde{\sigma} = 2\sigma > 0$. ■

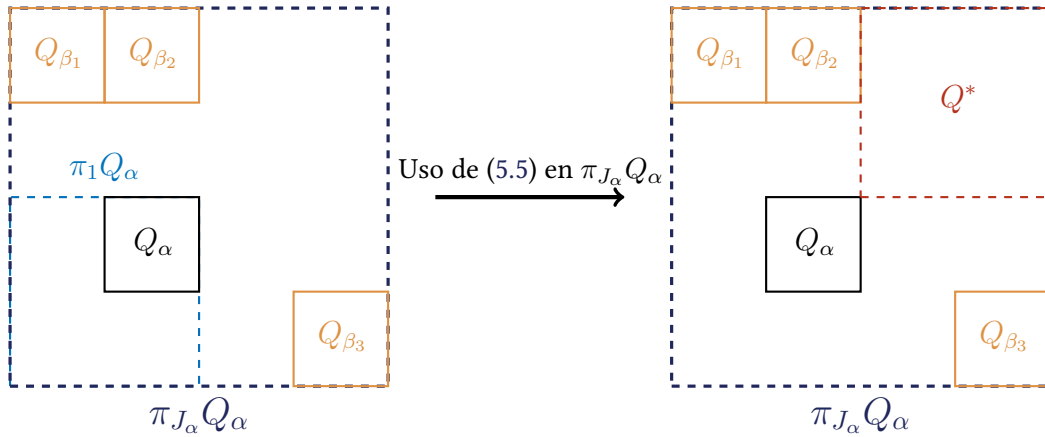


Figura 5.1: El cubo $\pi_{J_\alpha} Q_\alpha$ es el mayor ancestro de Q_α cuya intersección con la familia $\{Q_\beta\}_{\beta \in A}$ sigue siendo sustancial (en la figura, esta intersección se representa mediante los cubos Q_{β_i} , con $i = 1, 2, 3$). Esto es lo que permite, a través de la hipótesis (5.5) deducir la existencia de cubos adicionales de tamaño similar al de Q_α (en la figura, el cubo Q^*) y contenidos en $\pi_{J_\alpha} Q_\alpha$.

Combinando el Lema 5.12 con los Teoremas 5.8 y 5.9, obtenemos la equivalencia buscada.

Teorema 5.13. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces, las siguientes aseveraciones equivalen entre sí.*

- 5.13.1. *Existen constantes $C_0 > 0$ y $0 < s < (1 + 2^n)^{-1}$ tales que (5.5) se cumple para todo cubo $Q_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ que interseca a $\bar{E}$;*
- 5.13.2. *Para todo $p \in (1, \infty)$, existe $\theta \neq 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^\theta \in A_p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Por el Lema 5.12, 5.13.1 es equivalente a la condición $|\bar{E}| = 0$ y $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \frac{\tilde{C}_0}{t^{\tilde{\sigma}}} \mathcal{S}_{Q_0}(t)$ para todo cubo Q_0 que interseca $\bar{E}$, todo $t \in (0, 1)$ y ciertas constantes $\tilde{\sigma}, \tilde{C}_0 > 0$. Pero los Teoremas 5.8 y 5.9 muestran que esto es equivalente a 5.13.2. ■

5.4 Equivalencia de la segunda caracterización con la condición de porosidad en medianas

La caracterización para pesos distancia A_p dada por el Teorema 5.13 es notablemente más similar a la condición de porosidad débil si se compara con la primera caracterización hallada en los Teoremas 5.8 y 5.9. Aún así, no es trivial demostrar que esta nueva caracterización sea realmente una condición más general que la porosidad débil. Para más detalles, ver [Góm26], que tiene al Teorema 5.13 como resultado principal y donde se demuestra su relación con la porosidad débil.

Muy poco después que una versión preliminar de este artículo se haga pública, surgió un trabajo independiente debido a M. Pasquariello e I. Uriarte-Tuero donde se presentó una nueva caracterización mucho más reminiscente a la del caso $p = 1$. La definición propuesta por Pasquariello y Uriarte-Tuero es la siguiente.

Definición 5.14 ([PU25]). Sea $0 < s < 1$ una constante y sea Q_0 un cubo que interseca a E . Denotamos por $\mathcal{V}_s(Q_0)$ al mayor valor $\delta > 0$ tal que podemos llenar una proporción $(1 - s)$ de Q_0 con cubos diádicos Q que no intersecan a E y de medida $|Q|$ mayor o igual que δ . Es decir,

$$\mathcal{V}_s(Q_0) := \sup \left\{ \delta > 0 : \exists Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{D}(Q_0) \text{ tales que } Q_i \cap E = \emptyset, |Q_i| \geq \delta, \sum_i |Q_i| \geq (1 - s)|Q_0| \right\}.$$

Decimos que E es un **conjunto medianamente poroso** si existen constantes $0 < s < t < 1$ y $0 < \delta < 1$ tales que, para todo cubo Q_0 que interseca a E , existen subcubos diádicos $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{D}(Q_0)$ para los cuales se satisfacen las siguientes tres propiedades:

$$Q_i \cap E = \emptyset, \quad |Q_i| \geq \delta \mathcal{V}_t(Q_0), \quad \sum_{i=1}^k |Q_i| \geq (1 - s)|Q_0|.$$

Notemos que reemplazando $\mathcal{V}_t(Q_0)$ por $|\mathcal{M}(Q_0)|$ arriba obtenemos la definición de porosidad débil tal como fue definida en [And+24]. Usando esta definición, los autores demostraron lo siguiente.

Teorema 5.15 ([PU25]). Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Entonces, E es medianamente poroso si y solo si $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{p>1} A_p(\mathbb{R}^n)$ para algún $\alpha > 0$.

En [PU25] también se menciona que la Definición 5.14 es equivalente a requerir que existan constantes $0 < s < t \leq 1$ tales que

$$\mathcal{V}_t(Q_0) \leq \delta^{-1} \mathcal{V}_s(Q_0).$$

Ahora bien, por el Teorema 5.15 y el hecho que $\text{dist}(\cdot, E) = \text{dist}(\cdot, \bar{E})$, E es medianamente poroso si y solo si $\bar{E}$ lo es, por lo que podemos asumir que E es cerrado y comparar directamente:

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) = \mathcal{V}_t(Q_0)^{\frac{1}{n}},$$

lo que combinado con la desigualdad previa da como resultado que

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq C \mathcal{L}_{Q_0}(s) \tag{5.8}$$

es equivalente a la condición de porosidad en medianas. Observemos que la desigualdad (5.8) se diferencia de la caracterización de la sección previa (5.5) tan solo por la utilización de dos argumentos $0 < s, t < 1$ y por que únicamente depende de la función $\mathcal{L}_{Q_0}$ y no de $\mathcal{S}_{Q_0}$. Por supuesto que debido a los Teoremas 5.13 y 5.15 ambas condiciones son equivalentes, aunque ésto no resulta del todo inmediato. Claramente (5.5) implica (5.8) debido a que $\mathcal{L}_{Q_0}(t) \geq \mathcal{S}_{Q_0}(t)$ (ver 5.7.1). En esta sección, verificaremos el recíproco, esto es, partiendo de (5.8) obtendremos la desigualdad (5.5) para demostrar que realmente son condiciones equivalentes.

En lo que sigue haremos uso de la función

$$\mathcal{D}_Q(t) := \sup \{ R \geq 0 : |\{x \in Q : \text{dist}(x, E) \geq R\}| \geq t|Q| \}.$$

La utilidad de esta función reside en su capacidad de aproximar a la función $\mathcal{L}_{Q_0}$.

Lema 5.16. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío, cerrado y cumple $|E| = 0$ mientras que Q_0 es un cubo tal que $Q_0 \cap E \neq \emptyset$, entonces para todo par de números de la forma $0 < s' < s < 1$ se cumple

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \mathcal{D}_{Q_0}(s) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(s) \leq \frac{2}{1 - (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}}} \mathcal{D}_{Q_0}(s').$$

Demostración. Dados un número positivo ε pequeño y un punto $y \in Q_0$ tal que $\text{dist}(y, E) \geq \mathcal{D}_{Q_0}(s) - \varepsilon > 0$, se sigue que existe $Q \in \mathcal{D}_E(Q)$ con $l(Q) > \frac{1}{2\sqrt{n}}(\mathcal{D}_{Q_0}(s) - \varepsilon)$ conteniendo a y . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s|Q_0| &\leq |\{x \in Q_0 : \text{dist}(x, E) \geq \mathcal{D}_{Q_0}(s) - \varepsilon\}| \leq \left| \bigcup_{l(Q) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}(\mathcal{D}_{Q_0}(s) - \varepsilon)} Q \right| \\ &= \sum_{l(Q) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}(\mathcal{D}_{Q_0}(s) - \varepsilon)} |Q|, \end{aligned}$$

lo que implica $\frac{1}{2\sqrt{n}} \mathcal{D}_{Q_0}(s) \leq \mathcal{L}_{Q_0}(s)$, que corresponde a la primera desigualdad enunciada. A continuación, denotamos como λQ al cubo cuyo centro coincide con el de Q y que cumple $l(\lambda Q) = \lambda l(Q)$. Notemos que

$$\text{dist}(x, E) \geq \frac{1}{2} [1 - (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}}] l(Q) \geq \frac{1}{2} [1 - (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}}] \mathcal{L}_{Q_0}(s),$$

para todo $x \in (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}} Q$ y todo $Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ tal que $l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(s)$. Luego,

$$|\{x \in Q_0 : \text{dist}(x, E) \geq \frac{1}{2} [1 - (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}}] \mathcal{L}_{Q_0}(s)\}| \geq \left| \bigcup_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(s)} (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}} Q \right| \geq \frac{s'}{s} \sum_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(s)} |Q| \geq s' |Q_0|.$$

Hemos probado entonces que $\mathcal{L}_{Q_0}(s) \leq 2(1 - (\frac{s'}{s})^{\frac{1}{n}})^{-1} \mathcal{D}_{Q_0}(s')$. ■

Teorema 5.17. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y no vacío. Supongamos que existen constantes $C_0 > 0$ y $0 < s < t < 1$ tales que

$$\mathcal{L}_Q(s) \leq C_0 \mathcal{L}_Q(t)$$

para todo cubo Q que interseque con E . Entonces, existe otra constante $C_1 > 0$ tal que $\mathcal{L}_Q(t) \leq C_1 \mathcal{S}_Q(1 - t)$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{L}_Q(s) \leq C_0 C_1 \mathcal{S}_Q(1 - t).$$

Demostración. Procedamos por el absurdo. Esto es, supongamos que, fija una constante $M > 1$ suficientemente grande y a elegir luego, existe un cubo $Q_0 = Q(x_0, r_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $Q_0 \cap E \neq \emptyset$ tal que

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) > M\mathcal{S}_{Q_0}(1-t). \quad (5.9)$$

Observemos a continuación que

$$\sum_{l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)} |Q| + \sum_{l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)} |Q| \geq (1-t)|Q_0| + t|Q_0| = |Q_0|.$$

Más aún, debido a (5.9), sendas familias $\mathcal{Q}_1 := \{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : l(Q) \leq \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)\}$ y $\mathcal{Q}_2 := \{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)\}$ son disjuntas, por lo que generan una partición de los diádicos de Q_0 :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_E(Q_0) = \mathcal{Q}_1 \dot{\cup} \mathcal{Q}_2, \\ \sum_{Q \in \mathcal{Q}_1} |Q| = (1-t)|Q_0|, \\ \sum_{Q \in \mathcal{Q}_2} |Q| = t|Q_0|. \end{cases}$$

Dados $Q^* = Q(y, r) \in \mathcal{Q}_1$ y $0 \leq \xi \leq 1$, consideramos el cubo dilatado y trasladado según

$$Q_\xi := Q(y + \xi(x_0 - y), r + \xi(r_0 - r)).$$

Notemos que $Q^* \subseteq Q_\xi$ para todo $\xi \in [0, 1]$ (ver Figura 5.2a). Luego, la aplicación $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\xi \mapsto \frac{|Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q|}{|Q_\xi|}$$

es continua, $\phi(0) = 1$ y $\phi(1) = 1-t$. Podemos por lo tanto encontrar $\xi \in [0, 1]$ tal que $Q^* \subseteq Q_\xi$ y

$$\frac{|Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q|}{|Q_\xi|} = 1 - \frac{s+t}{2}. \quad (5.10)$$

A continuación, afirmamos que, si Q_ξ cumple (5.10), existe una constante positiva $C = C(n, s, t, C_0)$ tal que

$$l(Q_\xi) \leq C\mathcal{S}_{Q_0}(1-t), \quad (5.11)$$

como se haya esquematizado en la Figura 5.2b. Notemos que si $Q_\xi \cap E = \emptyset$, entonces para todo $Q \in \mathcal{Q}_1$, se cumple $\pi Q \not\subseteq Q_\xi$, puesto que $\pi Q \cap E \neq \emptyset$. Luego,

$$\left(1 - \frac{s+t}{2}\right)|Q_\xi| = \left|Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q\right| = \left|(Q_\xi \setminus Q'_\xi) \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q\right| \leq |Q_\xi \setminus Q'_\xi|$$

donde $Q'_\xi = \{x \in Q_\xi : \text{dist}(x, \partial Q_\xi) \geq 2\sqrt{n}\mathcal{S}_{Q_0}(1-t)\}$. Ahora bien, si $l(Q_\xi) = \tilde{C}\mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$ para cierta $\tilde{C} > 0$, entonces

$$\frac{|Q_\xi \setminus Q'_\xi|}{|Q_\xi|} \rightarrow 0 \text{ cuando } \tilde{C} \rightarrow \infty,$$

por lo que debemos tener $\tilde{C} \leq C$ donde $C = C(n, s, t)$. Es decir, vale (5.11).

Para demostrar (5.11) en el caso que $Q_\xi \cap E \neq \emptyset$, comenzamos por tomar $L = \sqrt{n} S_{Q_0}(1-t)$ y observar que

$$|\{x \in Q_\xi : d(x, E) \geq L\}| \leq \left| Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_2} Q \right| = 1 - \left| Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q \right| = \left(\frac{s+t}{2} \right) |Q_\xi|.$$

Luego, por definición de la función $\mathcal{D}_{Q_\xi}$, se sigue que

$$\sqrt{n} S_{Q_0}(1-t) \geq \mathcal{D}_{Q_\xi} \left(\frac{s+3t}{4} \right) \geq \kappa(s, t) \mathcal{L}_{Q_\xi}(t), \quad (5.12)$$

donde la constante $\kappa(s, t) = \frac{1}{2}(1 - (s/t)^{\frac{1}{n}})$ surge del Lema 5.16.

Por otro lado, tenemos que

$$Q_\xi \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_2} Q = R_1 \cup \dots \cup R_k$$

y

$$\left| \bigcup_{i=1}^k R_i \right| = \left(\frac{s+t}{2} \right) |Q_\xi|,$$

donde los conjuntos R_i son rectángulos disjuntos de a pares que se obtienen como $R_i = Q_\xi \cap Q$, para cierto $Q \in \mathcal{Q}_2$. Sea $\varepsilon(s, t) := 1 - \sqrt{\frac{2s}{s+t}} \in (0, 1)$, definimos las constantes $\lambda, \mu, C > 0$ según las relaciones

$$\begin{cases} \lambda > n^2 C_0 \kappa(s, t)^{-1}, \\ \frac{\lambda}{\mu} \leq \frac{1}{2} \varepsilon(s, t), \\ C \geq \frac{2^{1+\frac{1}{n}} \mu}{[\varepsilon(s, t)(s+t)]^{\frac{1}{n}}}. \end{cases}$$

En base a estas constantes, definimos también los números $L_\lambda = \lambda S_{Q_0}(1-t)$, $L_\mu = \mu S_{Q_0}(1-t)$ y suponemos que M (la constante en (5.9)) cumple $M \geq \mu$.

Queremos ver que (5.11) se cumple usando la constante C definida más arriba. Procedamos por el absurdo, esto es, supongamos que en realidad $l(Q_\xi) > C S_{Q_0}(1-t)$. Luego, si Q_ξ^μ es el cubo cuyo centro coincide con el de Q_ξ y su lado está dado por $l(Q_\xi^\mu) = l(Q_\xi) - L_\mu$, entonces

$$\begin{aligned} |Q_\xi \setminus Q_\xi^\mu| &= l(Q_\xi)^n - l(Q_\xi^\mu)^n = l(Q_\xi)^n - [l(Q_\xi) - 2L_\mu]^n \\ &= l(Q_\xi)^n - \left[l(Q_\xi) \left(1 - \frac{2L_\mu}{l(Q_\xi)} \right) \right]^n \\ &\leq l(Q_\xi)^n - \left[l(Q_\xi) \left(1 - \frac{2\mu S_{Q_0}(1-t)}{C S_{Q_0}(1-t)} \right) \right]^n \\ &= \left(\frac{2\mu}{C} \right)^n |Q_\xi| \\ &\leq \varepsilon(s, t) \left(\frac{s+t}{2} \right) |Q_\xi|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la definición de C . Por lo tanto, si $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_l}\} = \{R_i : R_i \cap Q_\xi^\mu \neq \emptyset \wedge 1 \leq i \leq k\}$ (es decir, los rectángulos R_{i_j} son aquellos que intersecan con el cubo interior Q_ξ^μ), entonces

$$\left| \bigcup_{j=1}^l R_{i_j} \right| \geq \left| \bigcup_{i=1}^k R_i \right| - |Q_\xi \setminus Q_\xi^\mu| \geq (1 - \varepsilon(s, t)) \left(\frac{s+t}{2} \right) |Q_\xi|.$$

En particular, $l > 0$ y el conjunto $\{R_{i_1}, \dots, R_{i_l}\}$ es necesariamente no vacío. Más aún, dado que para cada $1 \leq j \leq l$, tenemos que $R_{i_j} = Q_\xi \cap Q$ para cierto cubo Q con $l(Q) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t)$ y que $R_{i_j} \cap Q_\xi^\mu \neq \emptyset$, entonces si denotamos los lados de estos rectángulos como

$$R_{i_j} = [a_1^{i_j}, b_1^{i_j}) \times \dots \times [a_n^{i_j}, b_n^{i_j}),$$

se sigue que

$$|a_p^{i_j} - b_p^{i_j}| \geq \min\{L_\mu, \mathcal{L}_{Q_0}(t)\} \geq \min\{\mu \mathcal{S}_{Q_0}(1-t), M \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)\} \geq \mu \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$$

para todo $1 \leq p \leq l$, dado que $M \geq \mu$. Por lo tanto, si definimos nuevos $R_{i_j}^\lambda$ rectángulos según

$$R_{i_j}^\lambda := [a_1^{i_j} + L_\lambda, b_1^{i_j} - L_\lambda) \times \dots \times [a_n^{i_j} - L_\lambda, b_n^{i_j} - L_\lambda),$$

entonces,

$$|R_{i_j} \setminus R_{i_j}^\lambda| \leq \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right) |R_{i_j}| \leq \varepsilon(s, t) |R_{i_j}|$$

por definición de las constantes λ y μ . Luego,

$$\begin{aligned} |\{x \in Q_\xi : \text{dist}(x, E) \geq L_\lambda\}| &\geq \left| \bigcup_{j=1}^l R_{i_j}^\lambda \right| \\ &\geq (1 - \varepsilon(s, t)) \left| \bigcup_{j=1}^l R_{i_j} \right| \\ &\geq (1 - \varepsilon(s, t))^2 \left(\frac{s+t}{2}\right) |Q_\xi| \\ &\geq s |Q_\xi|. \end{aligned}$$

Esto implica que $L_\lambda \leq \mathcal{D}_{Q_\xi}(s) \leq \sqrt{n} \mathcal{L}_{Q_\xi}(s)$. Luego, recurriendo a la hipótesis, al [Lema 5.16](#) y usando (5.12), deducimos que

$$\lambda \mathcal{S}_{Q_0}(1-t) \leq \mathcal{D}_{Q_\xi}(s) \leq \sqrt{n} \mathcal{L}_{Q_\xi}(s) \leq \sqrt{n} C_0 \mathcal{L}_{Q_\xi}(t) \leq n^2 C_0 \kappa(s, t)^{-1} \mathcal{S}_{Q_0}(1-t),$$

lo cual es absurdo dado que $\lambda > n^2 C_0 \kappa(s, t)^{-1}$. Por lo tanto, $l(Q_\xi) \leq C \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$, tal como se había afirmado anteriormente.

Hemos demostrado que, dado un cubo arbitrario $Q^* \in \mathcal{Q}_1$, existe otro cubo Q^{**} tal que $Q^* \subseteq Q^{**}$, $l(Q^{**}) \leq C \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$ y $Q^{**} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_2} Q \neq \emptyset$. En particular, esto significa que para cada $Q^* \in \mathcal{Q}_1$, podemos hallar un cubo $P^* \in \mathcal{Q}_2$ tal que

$$\text{dist}(Q^*, P^*) \leq \sqrt{n} C \mathcal{S}_{Q_0}(1-t).$$

Pero dado que $l(P^*) \geq \mathcal{L}_{Q_0}(t) > M \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$, si definimos $R(P)$ como el cubo cuyo centro coincide con el de P pero tal que $l(R(P)) = l(P^*) + 2\sqrt{n} C \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$, entonces $Q^* \subseteq R(P)$. Luego, tenemos que

$$\bigcup_{P \in \mathcal{Q}_2} R(P) \supset \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_1} Q \cup \bigcup_{P \in \mathcal{Q}_2} P.$$

Esta contención implica que

$$\left| \bigcup_{P \in \mathcal{Q}_2} R(P) \right| \geq |Q_0|,$$

sin embargo,

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{P \in Q_2} R(P) \right| &\leq \sum_{P \in Q_2} |R(P)| \\
 &= \sum_{P \in Q_2} \left[l(P) \left(1 + \frac{2\sqrt{n}C \mathcal{S}_{Q_0}(1-t)}{l(P)} \right) \right]^n \\
 &\leq \sum_{P \in Q_2} \left[l(P) \left(1 + \frac{2\sqrt{n}C}{M} \right) \right]^n \\
 &= \left(1 + \frac{2\sqrt{n}C}{M} \right)^n \sum_{P \in Q_2} |P| \\
 &= t|Q_0| \left(1 + \frac{2\sqrt{n}C}{M} \right)^n \\
 &< |Q_0|
 \end{aligned}$$

si tomamos

$$M > \max \left\{ \mu, \frac{2\sqrt{n}C}{t^{-\frac{1}{n}} - 1} \right\}.$$

Esto es una contradicción que se obtuvo al suponer (5.9). Esto concluye la demostración del teorema. ■

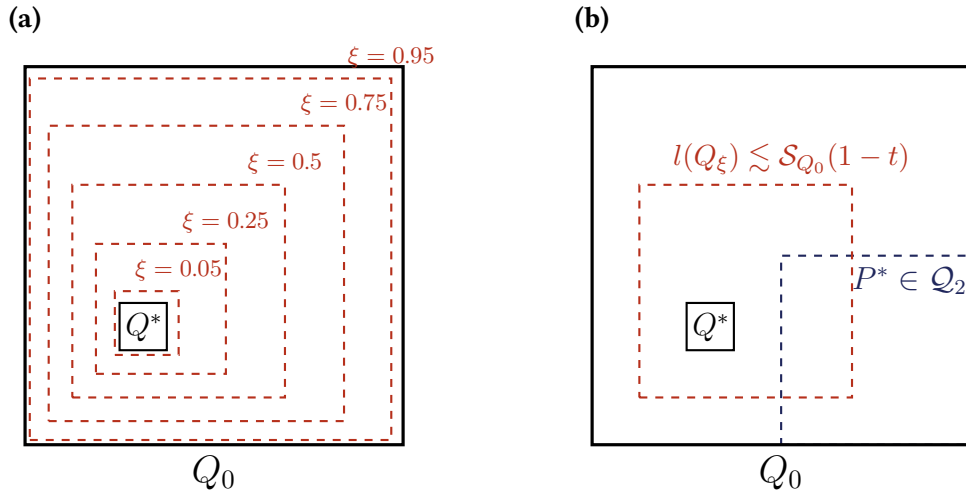


Figura 5.2: Los cubos Q_ξ constan de dilataciones y traslaciones continuas del cubo original Q^* , de forma que siempre lo contienen y tienden a Q_0 cuando $\xi \rightarrow 1^+$ (a). Tomando ξ tal que se cumpla (5.10), es posible demostrar que el cubo Q_ξ conteniendo a Q^* interseca a al menos un cubo $P^* \in Q_2$ y tiene un lado $l(Q_\xi)$ comparable con el valor de $\mathcal{S}_{Q_0}(1-t)$, lo que implica que los cubos pequeños (familia Q_1) se encuentran aglomerados en los alrededores de los cubos más grandes (familia Q_2) (b).

La demostración del Teorema 5.17 se basa en considerar dos familias de cubos diádicos disjuntas y estudiar cómo la dilatación de los cubos en una de estas familias eventualmente interseca con la restante. Esta es de hecho la misma técnica que la utilizada en la prueba del Lema 5.12, aunque en este último caso la dilataciones consideradas fueron discretas, al reemplazar cada cubo Q en

estudio por alguno sus ancestros diádicos $\pi_j Q$. Esta misma discretización fue la que llevó a la restricción $s < (1 + 2^n)^{-1}$ que figura en la segunda caracterización, y que probablemente podría ser sorteada de utilizarse un argumento en base a dilataciones continuas como en el teorema anterior.

5.5 Pesos distancia A_p en espacios de tipo homogéneo

Supongamos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo tal que las d -bolas forman una base de τ_d . En esta sección consideramos el problema de caracterización de los conjuntos en $\Sigma_p(X, d, \mu)$ con $p > 1$. Veremos que, modificando adecuadamente las funciones $\mathcal{L}_Q$ y $\mathcal{S}_Q$ sobre las d -bolas del nuevo espacio, es posible obtener una caracterización muy similar a la descrita en la Sección 2.2 para los pesos distancia en espacios eucídeos. En vez de considerar la fracción cubierta por subcubos diádicos de un cubo Q , la idea ahora consiste en cubrir una d -bola B simplemente considerando los puntos x que más alejados o cercanos se encuentren con respecto al conjunto E .

Definición 5.18. Dado un conjunto $E \subseteq X$ no vacío y B una d -bola arbitraria. Para $0 \leq R \leq 1$, introducimos los conjuntos

$$C_B(R) = \{x \in B : d(x, E) \leq R\rho_{d,E}(B)\} \quad (5.13)$$

y

$$D_B(R) = \{x \in B : d(x, E) \geq R\rho_{d,E}(B)\}. \quad (5.14)$$

Eventualmente será conveniente trabajar en vez con los conjuntos $C_B^0(R)$ y $D_B^0(R)$ obtenidos a partir de (5.13) y (5.14) pero intercambiando los signos $\leq$ y $\geq$ por $<$ y $>$, respectivamente. A partir de estos suconjuntos de $B \subseteq X$ y para $t \in (0, 1)$ fijo, definimos también los subconjuntos del intervalo unidad:

$$I_C(t, B, E) = \{R \in [0, 1] : \mu(C_B(R)) \geq t\mu(B)\} \quad (5.15)$$

y

$$I_D(t, B, E) = \{R \in [0, 1] : \mu(D_B(R)) \geq t\mu(B)\} \quad (5.16)$$

Observación: el hecho que $\mu(\bar{E}) = 0$ implica que $\rho_{d,E}(B) > 0$ para toda bola B que interseque con E . Por esta razón, los conjuntos (5.15) y (5.16) están bien definidos.

Los conjuntos $I_C(t, B, E)$ y $I_D(t, B, E)$ están definidos en analogía con los conjuntos $\mathcal{S}(t, Q, E)$ y $\mathcal{L}(t, Q, E)$, respectivamente. En particular, las funciones que tomarán el lugar de $\mathcal{L}_Q$ y $\mathcal{S}_Q$ estarán dadas por los extremos de estos nuevos conjuntos. De aquí en adelante, la estrategia es análoga a la seguida en las Secciones 5.1 y 5.2: comenzaremos por explorar las propiedades básicas de los conjuntos $I_C(t, B, E)$ y $I_D(t, B, E)$, lo que permitirá a su vez estudiar las propiedades de sus extremos y usar estos últimos para obtener la caracterización final en los Teoremas 5.23 y 5.25.

Proposición 5.19 (Propiedades de los conjuntos I_C y I_D). Sea $\emptyset \neq E \subseteq X$ con $\mu(\bar{E}) = 0$.

5.19.1. Si $0 < t' \leq t < 1$, entonces $I_C(t, B, E) \subseteq I_C(t', B, E)$ y $I_D(t, B, E) \subseteq I_D(t', B, E)$.

5.19.2. Para todo $t \in (0, 1)$, existen $R_t, R'_t > 0$ tales que $I_C(t, B, E) = [R'_t, 1]$ y $I_D(t, B, E) = [0, R_t]$. En particular, ambos conjuntos son intervalos.

Demostración. Si $R \in I_D(t, B, E)$, entonces

$$\mu(D_B(R)) \geq t \mu(B) \geq t' \mu(B).$$

De esto se deduce fácilmente 5.19.1. Consideremos 5.19.2. Notemos que

$$\mu(C_D(0)) = \mu(B) \geq t \mu(B)$$

para todo $t \in (0, 1)$, luego $0 \in I_D(t, B, E)$. Además, si $R' < R$ y $R \in I_D(t, B, E)$, entonces

$$\mu(D_B(R')) \geq \mu(D_B(R)) \geq t \mu(B),$$

es decir, $R' \in I_D(t, B, E)$. En otras palabras, $I_D(t, B, E)$ es un intervalo cuyo extremo inferior es igual a 0. Sea ahora

$$R_t = \sup I_D(t, B, E).$$

Veamos que este supremo es positivo y está de hecho contenido en $I_D(t, B, E)$. Si $0 < R_n \searrow 0$, entonces

$$\mu(D_B(R_n)) \rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_B(R_n)\right) = \mu(B \setminus \bar{E}) = \mu(B).$$

Luego, $0 < R_n \in I_D(t, B, E)$ para n suficientemente grande. Consideremos ahora una sucesión

$$0 < R_n \nearrow R_t \quad \text{con} \quad R_n \in I_D(t, B, E).$$

Se sigue que

$$\mu(D_B(R_t)) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_B(R_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_B(R_n)) \geq t \mu(B),$$

lo que implica $R_t \in I_D(t, B, E)$. Por otro lado, dado que

$$\mu(C_B(1)) = \mu(B) \geq t \mu(B)$$

para todo $t \in (0, 1)$, tenemos que $1 \in I_C(t, B, E)$. Como

$$\mu(C_B(R)) \leq \mu(C_B(R')) \quad \text{para todo } R' > R,$$

se sigue que $I_C(t, B, E)$ es un intervalo cuyo extremo superior es igual a 1. Sean ahora

$$R'_t := \inf I_C(t, B, E)$$

y $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $0 < R_n \in I_C(t, B, E)$ y $R_n \searrow R'_t$. Luego

$$\mu(C_B(R'_t)) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_B(R_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_B(R_n)) \geq t \mu(B).$$

Esto es, $R'_t \in I_C(t, B, E)$. Para ver que $R'_t > 0$, simplemente observamos que si $R_n \searrow 0$ entonces

$$\mu(C_B(R_n)) \rightarrow \mu(\bar{E} \cap B) = 0,$$

de lo que se sigue que $R \notin I_C(t, B, E)$ si elegimos R suficientemente pequeño. ■

Definición 5.20. Sean E y B como en la Definición 5.18. Definimos las funciones $\mathcal{C}_B : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ y $\mathcal{D}_B : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ dadas por

$$\mathcal{C}_B(t) := \min I_C(t, B, E) \quad (5.17)$$

y

$$\mathcal{D}_B(t) := \max I_D(t, B, E). \quad (5.18)$$

Lema 5.21. Sea $\emptyset \neq E \subseteq X$ con $\mu(\bar{E}) = 0$.

5.21.1. Valen las desigualdades

$$\mu(C_B(\mathcal{C}_B(t))) \geq t\mu(B), \quad \mu(D_B(\mathcal{D}_B(t))) \geq t\mu(B)$$

y

$$\mu(D_B^0(\mathcal{C}_B(t))) \leq (1-t)\mu(B), \quad \mu(C_B^0(\mathcal{D}_B(t))) \leq (1-t)\mu(B).$$

5.21.2. $\mathcal{D}_B(t) \in I_C(1-t, B, E), \forall t \in (0, 1)$. En particular, $\mathcal{D}_B(t) \geq \mathcal{C}_B(1-t)$.

Demostración.

(5.21.1) Las desigualdades $\mu(C_B(\mathcal{C}_B(t))) \geq t\mu(B)$ y $\mu(D_B(\mathcal{D}_B(t))) \geq t\mu(B)$ se siguen del hecho que $\mathcal{C}_B(t) \in I_C(t, B, E)$ y $\mathcal{D}_B(t) \in I_D(t, B, E)$. Por otro lado,

$$\mu(D_B^0(\mathcal{C}_B(t))) = \mu(B) - \mu(C_B(\mathcal{C}_B(t))) \leq (1-t)\mu(B),$$

y, análogamente,

$$\mu(C_B^0(\mathcal{D}_B(t))) = \mu(B) - \mu(D_B(\mathcal{D}_B(t))) \leq (1-t)\mu(B).$$

(5.21.2) En el caso que $\mathcal{D}_B(t) = 1$, ya sabemos que $\mathcal{D}_B(t) \in I_C(s, B, E)$ para cualquier $s \in (0, 1)$. Supongamos entonces que $\mathcal{D}_B(t) < 1$. En este caso, tenemos que

$$D_B^0(\mathcal{D}_B(t)) = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_B(\mathcal{D}_B(t) + \varepsilon).$$

Luego,

$$\mu(D_B^0(\mathcal{D}_B(t))) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu(D_B(\mathcal{D}_B(t) + \varepsilon)) \leq t\mu(B),$$

donde la desigualdad final es consecuencia de que $\mathcal{D}_B(t)$ sea el máximo de $I_D(t, B, E)$. Pero entonces

$$\mu(C_B(\mathcal{D}_B(t))) = \mu(B) - \mu(D_B^0(\mathcal{D}_B(t))) \geq (1-t)\mu(B).$$

■

Lema 5.22. Sean $\emptyset \neq E \subseteq X$ con $\mu(\bar{E}) = 0$ y $B \subseteq X$ una bola tal que $B \cap E \neq \emptyset$. Entonces, se cumplen los límites

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_B(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{D}_B(t) = 0.$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{D}_B$ es no creciente, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{D}_B(t) = R^*$$

para cierto $R^* \in [0, 1]$. Observamos que

$$\mu(D_B(R^*)) \geq t \mu(B)$$

para todo $t \in (0, 1)$. Luego, $\mu(D_B(R^*)) = \mu(B)$. Dado ahora $y \in \bar{E} \cap B$, podemos hallar $0 < r < K_d^{-1} R^* \rho_{d,E}(B)$ tal que $B_d(y, r) \subseteq B$. Pero si $w \in B_d(y, r)$ y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ es una sucesión tal que $d(y, e_n) \rightarrow 0$, entonces

$$d(w, E) \leq K_d[d(w, y) + d(y, e_n)] \leq K_d r + K_d d(y, e_n) \rightarrow K_d r \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Se sigue que $B_d(y, r) \subseteq B \setminus D_B(R^*)$ y, consecuentemente,

$$0 = \mu(B \setminus D_B(R^*)) \geq \mu(B_d(y, r)) > 0.$$

Esto claramente es un absurdo que vino de suponer que $R^* > 0$. Luego, $R^* = 0$ y, por 5.21.2, deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_B(t) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_B(1-t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{D}_B(t) = 0.$$

■

Teorema 5.23. Sea $\emptyset \neq E \subseteq X$ y supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_p(X, d, \mu)$ para algún $1 < p \leq \infty$. Entonces, existen constantes positivas C_0 y σ tales que

$$\mathcal{D}_B(t) \leq C_0 t^{-\sigma} \mathcal{C}_B(t). \quad (5.19)$$

para toda bola $B \cap E \neq \emptyset$ y todo $t \in (0, 1)$.

Demostración. Denotando $w(x) = d(x, E)^{-\alpha}$, dado que $w \in A_p$, en particular w es localmente integrable. Pero $w(x) = \infty$ para todo $x \in \bar{E}$, por lo que debe ser $\mu(\bar{E}) = 0$, luego las funciones $\mathcal{C}_B$ y $\mathcal{D}_B$ están bien definidas. Sea $t \in (0, 1)$. Usando la condición A_p de w en B junto con las propiedades de $\mathcal{C}_B$ y $\mathcal{D}_B$, obtenemos

$$\begin{aligned} [d(\cdot, E)^{-\alpha}]_{A_p(X, d, \mu)} &\geq \left(\int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \right) \left(\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{p-1} \\ &\geq \left(\int_{C_B(\mathcal{C}_B(t))} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \right) \left(\int_{D_B(\mathcal{D}_B(t))} d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{p-1} \\ &\geq \mathcal{C}_B(t)^{-\alpha} \rho_{d,E}(B)^{-\alpha} \frac{\mu(C_B(\mathcal{C}_B(t)))}{\mu(B)} \left(\mathcal{D}_B(t)^{\frac{\alpha}{p-1}} \rho_{d,E}(B)^{\frac{\alpha}{p-1}} \frac{\mu(D_B(\mathcal{D}_B(t)))}{\mu(B)} \right)^{p-1} \\ &\geq t^p \left(\frac{\mathcal{D}_B(t)}{\mathcal{C}_B(t)} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

■

Lema 5.24. Sean $\emptyset \neq E \subseteq X$ con $\mu(\bar{E}) = 0$ y $B \subseteq X$ una bola tal que $B \cap E \neq \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned} B &= F_1 \cup D_B(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} C_B^0(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2^k})) \setminus C_B^0(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2^{k+1}})) \\ &= F_2 \cup C_B(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^{k+1}})) \end{aligned}$$

donde $\mu(F_1) = \mu(F_2) = 0$.

Demostración. La primera igualdad se deduce fácilmente del Lema 5.22 notando que

$$\begin{aligned} D_B(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} C_B^0(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2^k})) \setminus C_B^0(\mathcal{C}_B(\tfrac{1}{2^{k+1}})) &\supset \{x \in B : d(x, E) > \rho_{d,E}(B) \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_B(\sigma)\} \\ &= \{x \in B : d(x, E) > 0\}. \end{aligned}$$

Luego, podemos tomar $F_1 := \{x \in B : d(x, E) \leq 0\} = B \cap \bar{E}$, que satisface $\mu(F_1) = 0$ por hipótesis.

Comprobemos ahora la igualdad restante. Denotando $R^* := \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathcal{C}_B(t)$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_B(t) \geq R^*.$$

Además, dado que $R^* \geq \mathcal{C}_B(t)$, para todo $t \in (0, 1)$, se cumple

$$\mu(C_B(R^*)) \geq t \mu(B) \implies \mu(C_B(R^*)) = \mu(B).$$

En particular, $\mu(\{x \in B : d(x, E) > R^* \rho_{d,E}(B)\}) = 0$. Luego, en el caso en que $\mu(\{x \in B : d(x, E) = R^* \rho_{d,E}(B)\}) = 0$, basta con tomar

$$F_2 := \{x \in B : d(x, E) \geq R^* \rho_{d,E}(B)\},$$

puesto que entonces $\mu(F_2) = 0$ y

$$\begin{aligned} C_B(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^{k+1}})) &\supset \{x \in B : d(x, E) < \rho_{d,E}(B) \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_B(t)\} \\ &\supset \{x \in B : d(x, E) < R^* \rho_{d,E}(B)\}. \end{aligned}$$

Supongamos, por el contrario, que

$$\mu(\{x \in B : d(x, E) = R^* \rho_{d,E}(B)\}) = t_0 \mu(B),$$

con $0 < t_0 \leq 1$. Pero entonces

$$\mathcal{D}_B(st_0) \geq R^*, \quad \text{para todo } s \in (0, 1).$$

Consecuentemente,

$$C_B(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\tfrac{1}{2^{k+1}})) \supset \{x \in B : d(x, E) \leq R^* \rho_{d,E}(B)\},$$

por lo que en este caso basta con tomar

$$F_2 := \{x \in B : d(x, E) > R^* \rho_{d,E}(B)\}.$$

■

Teorema 5.25. Sea $\emptyset \neq E \subseteq X$ un conjunto con $\mu(\bar{E}) = 0$ y tal que existen constantes $C_0, \sigma > 0$ para las cuales se cumple (5.19) para toda bola $B \cap E \neq \emptyset$ y todo $t \in (0, 1)$. Entonces, para todo $1 < p < \infty$, existe $\alpha > 0$ tal que $d(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_p(X, d, \mu)$.

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$. Buscamos constantes $\alpha, C > 0$ tales que la desigualdad

$$\left(\int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \right) \left(\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C$$

se cumpla para toda bola $B = B(y, r) \subseteq X$. Con este fin, consideramos tres casos distintos.

Caso I ($B \cap E = \emptyset \wedge d(B, E) \geq 4K_d^2 r$): dados $x, x' \in B$ y $e \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, e) &\geq \frac{1}{K_d} d(x', e) - d(x, x') \geq \frac{1}{K_d} d(x', E) - 2K_d r \\ &\geq \frac{1}{K_d} d(x', E) - \frac{1}{2K_d} d(B, E) \\ &\geq \frac{1}{2K_d} d(x', E). \end{aligned}$$

En particular, $(2K_d)^{-1} d(x', E) \leq d(x, E) \leq 2K_d d(x', E)$. De aquí se sigue que, para cualquier $\alpha > 0$, $\int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \leq (2K_d)^\alpha d(x', E)^{-\alpha}$ y $\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \leq (2K_d)^{\frac{\alpha}{p-1}} d(x', E)^{\frac{\alpha}{p-1}}$, lo que permite obtener

$$\left(\int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \right) \left(\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq (4K_d^2)^\alpha.$$

Caso II ($B \cap E = \emptyset \wedge d(B, E) < 4K_d^2 r$): este caso se puede obtener a través del Caso III al notar que, si m es tal que $2^{m-1} \leq 5K_d^3 \leq 2^m$, entonces

$$\begin{aligned} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\leq \frac{\mu(5K_d^3 B)}{\mu(B)} \int_{5K_d^3 B} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq c_{\mu, d}^m \int_{5K_d^3 B} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x). \end{aligned}$$

Análogamente, se ve que $\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \leq c_{\mu, d}^m \int_{5K_d^3 B} d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x)$. Luego, dado que $5K_d^3 B \cap E \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \int_B d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) &\leq 4^n \int_{5K_d^3 B} d(x, E)^{-\alpha} d\mu(x) \\ &\leq c_{\mu, d} C \left(\int_{5K_d^3 B} d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{1-p} \\ &\leq c_{\mu, d} C \left(\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x) \right)^{1-p}, \end{aligned}$$

para el mismo rango de valores α que en el caso siguiente.

Caso III ($B \cap E \neq \emptyset$): sea $0 < \alpha < 1$ a elegir luego. Escribimos, recurriendo al Lema 5.24,

$$B = D_B(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^{k+1}})).$$

A partir de esta partición, estimamos

$$\int_B d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu = \int_{D_B(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2}))} d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^{k+1}}))} d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu.$$

Podemos encontrar rápidamente una cota apropiada para el primer término de la derecha haciendo

$$\int_{D_B(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2}))} d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu \leq \mathcal{C}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha} \leq \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha},$$

donde 5.21.2 fue empleado para obtener la última desigualdad. Este mismo resultado, junto con 5.21.1, pueden utilizarse para obtener una cota similar para el término restante de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^{k+1}}))} d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_B(\frac{1}{2^{k+1}})^{-\alpha} \mu(C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, C_0) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)} \mathcal{D}_B(\frac{1}{2^{k+1}})^{-\alpha} \mu(C_B^0(\mathcal{C}_B(\frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, C_0) \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)} \mu(C_B^0(\mathcal{D}_B(1 - \frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, C_0) \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\alpha\sigma(k+1)-k} \\ &= C(\alpha, \sigma, C_0) \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha\sigma-1)} \\ &= C(\alpha, \sigma, C_0) \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha}. \end{aligned}$$

si $\alpha < \sigma^{-1}$. Hemos comprobado que para estos valores de α la integral $\int_B d(\cdot, E)^{-\alpha} d\mu$ está acotada superiormente (salvo por multiplicación por una constante) por la cantidad $\mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{-\alpha}$. Si logramos verificar una desigualdad del tipo $(\int_B d(\cdot, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu)^{p-1} \leq C \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{\alpha}$ para α suficientemente pequeño, habremos demostrado el caso restante. Con esto en mente, consideramos ahora la partición

$$B = C_B(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2})) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^{k+1}}))$$

dada asimismo en el Lema 5.24. Como antes, comenzamos por partir la integral inicial de acuerdo a la partición propuesta.

$$\int_B d(\cdot, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu = \int_{C_B(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2}))} d(\cdot, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^{k+1}}))} d(\cdot, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu.$$

El primer término es mayorado por $\mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}}$. Para el segundo término, empleamos nuevamente 5.21.1 y 5.21.2 para estimar

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^k})) \setminus D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^{k+1}}))} d(\cdot, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}_B(\frac{1}{2^{k+1}})^{\frac{\alpha}{p-1}} \mu(D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, p, C_0) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{\alpha\sigma}{p-1}(k+1)} \mathcal{C}_B(\frac{1}{2^{k+1}})^{\frac{\alpha}{p-1}} \mu(D_B^0(\mathcal{D}_B(\frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, p, C_0) \mathcal{C}_B(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{\alpha\sigma}{p-1}(k+1)} \mu(D_B^0(\mathcal{C}_B(1 - \frac{1}{2^k}))) \\ &\leq C(\alpha, p, \sigma, C_0) \mathcal{C}_B(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\frac{\alpha\sigma}{p-1}-1)} \\ &\leq C(\alpha, p, \sigma, C_0) \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{p-1}}. \end{aligned}$$

donde se tomó $\alpha < (p-1)\sigma^{-1}$, obteniéndose por tanto $(\int_B d(x, E)^{\frac{\alpha}{p-1}} d\mu(x))^{p-1} \leq C \mathcal{D}_B(\frac{1}{2})^\alpha$, la cota deseada. ■

El teorema principal de esta sección es el siguiente, siendo una consecuencia directa de los Teoremas 5.23 y 5.25.

Teorema 5.26. *Sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío con $\mu(\bar{E}) = 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

5.26.1. *Existen constantes $C_0, \sigma > 0$ tales que (5.19) se cumple para toda bola $B \subseteq X$ que interseca a $\bar{E}$ y todo $t \in (0, 1)$;*

5.26.2. *Para todo $p \in (1, \infty)$, existe $\theta \neq 0$ tal que $d(\cdot, E)^\theta \in A_p(X, d, \mu)$.*

Esta caracterización de los conjuntos en $\Sigma_p(X, d, \mu)$ es análoga a la obtenida en los Teoremas 5.8 y 5.9 en el contexto euclídeo. Desafortunadamente, los argumentos empleados para obtener la segunda caracterización en aquel contexto o incluso la equivalencia con la condición de porosidad en medianas llevada a cabo en la Sección 5.4 no resultan fáciles de extender a espacios de tipo homogéneo; al menos a través de las funciones $\mathcal{C}_B$ y $\mathcal{D}_B$. Quizás un enfoque basado en sistemas diádicos generales como los utilizados en [Mud25] sea más apropiado, al menos para extender el Teorema 5.13 a espacios más generales, o incluso una adaptación de los métodos de dominación *sparse* empleados en [PU25].

5.6 Ejemplos

En esta última sección del capítulo consideraremos algunos ejemplos de interés dentro de la teoría de pesos distancia, buscando ilustrar los resultados desarrollados hasta ahora. Estos ejemplos fueron expuestos en [And+24; Mud25] antes que la teoría de pesos distancia A_p fuera desarrollada en [Góm26; PU25], y consisten de los conjuntos $E(\{c_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ presentados en el Capítulo 1.

Para comodidad del lector, recordemos que, dada una sucesión de contracciones $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, el conjunto $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ se define como

$$E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) := -E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cup E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$$

donde $-E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ es la reflexión de $E^+(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ a través del origen, mientras que los conjuntos E_n se definen como sigue. En primer lugar, tomamos $E_0 := \{0, 1\}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente

$$E_n := E_{n-1} \cup E'_{n-1} \cup E''_{n-1},$$

donde E'_{n-1} es una copia trasladada de E_{n-1} y dilatada por el factor c_n , de forma tal que su primer punto coincide con el último punto de E_{n-1} ; mientras que E''_{n-1} es una copia idéntica de E_{n-1} trasladada de forma tal que su primer punto coincide con el último punto de E'_{n-1} .

En función de la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, los puntos de $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ pueden presentar cierto grado de aglomeración en regiones lejanas del origen. La Figura 1.5 esquematiza el comportamiento de $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ para distintas sucesiones de partida. En el caso del conjunto $E(\{1\}_{n \in \mathbb{N}}) = \mathbb{Z}$, este resulta ser débilmente poroso por una aplicación directa de la Proposición 4.11, y por lo tanto admite pesos distancia en $A_1(\mathbb{R})$. Por otro lado, los autores de los trabajos mencionados demostraron que el conjunto $E(\{1 - \frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}})$ cumple $\text{dist}(\cdot, E(\{1 - \frac{1}{2^n}\}))^{-\alpha} \in A_p(\mathbb{R}) \setminus A_1(\mathbb{R})$

para todo $0 < \alpha < 1$ y todo $1 < p < \infty$; mientras que $\text{dist}(\cdot, E(\{\frac{1}{2}\}_{n \in \mathbb{N}}))^{-\alpha}$ es un peso duplicante que no está contenido en $\bigcup_{p \geq 1} A_p(\mathbb{R})$ para ninguna elección de $0 < \alpha < 1$. Esto muestra que los conjuntos $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ son particularmente útiles para construir o bien ejemplos de pesos de Muckenhoupt o meramente pesos duplicantes dependiendo de la elección de la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dando lugar a pesos más regulares a medida que la sucesión se aproxima a uno con mayor rapidez.

A continuación, pondremos nuestra atención en los conjuntos contruidos a partir de las sucesiones $c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ y $c_n = \frac{1}{2}$, buscando mostrar cómo la teoría desarrollada en las secciones anteriores concuerda con las propiedades esperadas de los conjuntos $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Más precisamente, si para cada $n \in \mathbb{N}$, Q_n denota el cubo (intervalo) más pequeño de $\mathbb{R}$ que contiene al conjunto E_n (por supuesto, la definición de cada Q_n depende de la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$), entonces vale el siguiente enunciado.

Proposición 5.27. *Sea $E = E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ donde $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de contracciones $0 < c_n < 1$.*

5.27.1. *Si la sucesión de contracciones considerada está dada por $c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, entonces existen $C_0 > 0$ y $s \in (0, \frac{1}{1+2^n})$ tales que*

$$\mathcal{L}_{Q_n}(s) \leq C_0 \mathcal{S}_{Q_n}(s) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

5.27.2. *Si la sucesión de contracciones considerada está dada por $c_n = \frac{1}{2}$, entonces para todo $t \in (0, \frac{1}{8})$ tenemos que*

$$\frac{\mathcal{L}_{Q_n}(t)}{\mathcal{S}_{Q_n}(t)} \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

El ítem 5.27.2 implica que $E(\{\frac{1}{2}\})$ no admite pesos distancia A_p , dado que (5.5) no puede cumplirse para ninguna elección de σ , $C_0 > 0$, lo cual concuerda con la discusión previa. Por otro lado, recordemos que el conjunto considerado en 5.27.2 sí admite pesos distancia en $A_p(\mathbb{R})$ para todo $1 < p < \infty$, pero no en $A_1(\mathbb{R})$. En particular, este conjunto no es débilmente poroso, pero debería satisfacer (5.5) para todo cubo Q_0 que lo interseque. Naturalmente, 5.27.2 es un enunciado más débil que esta condición, y extenderlo a todo cubo que interseque al conjunto $E(\{1 - \frac{1}{2^n}\})$ requeriría una gran cantidad de resultados adicionales y sumamente técnicos. En su lugar, el objetivo aquí es simplemente demostrar (5.5) para la sucesión de cubos Q_n que, en cierto sentido, constituyen el núcleo estructural del conjunto en cuestión. Para demostrar la Proposición 5.27 utilizaremos un enfoque probabilístico para describir la distribución de los poros en un dado cubo Q con respecto al conjunto $E(\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}})$, lo que puede en sí mismo resultar de interés para futuras aplicaciones.

Al trabajar con subconjuntos de la recta, será conveniente en general considerar la distribución de los poros vistos como componentes conexas y no como subcubos diádicos. Sea E un conjunto cerrado no vacío de la recta real y sea $Q_0 \subseteq \mathbb{R}$ un cubo. La colección

$$\mathcal{C}_E(Q_0) = \{I : I \text{ es una componente conexa de } Q_0^\circ \setminus E\}$$

consiste en todos los intervalos abiertos I que resultan ser las componentes conexas de $Q_0^\circ \setminus E$, en contraste con $\mathcal{D}_E(Q_0)$, que estaba formada por intervalos diádicos. Usando esta nueva colección, podemos definir análogos de las funciones $\mathcal{L}_{Q_0}$ y $\mathcal{S}_{Q_0}$: para todo $0 < t < 1$, definimos

$$\tilde{\mathcal{L}}(t, Q_0, E) = \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ |I| \geq L}} \frac{|I|}{|Q_0|} \geq t \right\}$$

y

$$\tilde{\mathcal{S}}(t, Q_0, E) = \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ |I| \leq L}} \frac{|I|}{|Q_0|} \geq t \right\}.$$

Luego, consideramos las funciones

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t) := \sup \tilde{\mathcal{L}}(t, Q_0, E)$$

y

$$\tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t) := \inf \tilde{\mathcal{S}}(t, Q_0, E).$$

El siguiente resultado muestra que estas cantidades están naturalmente relacionadas con sus contrapartes diádicas que se han utilizado hasta ahora.

Lema 5.28. *Sea E cerrado y no vacío con medida de Lebesgue nula y sean $0 < t' < t < 1$. Entonces, para todo cubo Q_0 que interseca a E , se cumplen las desigualdades*

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t) \leq 4\mathcal{L}_{Q_0}(\tfrac{1}{4}t) \quad (5.20)$$

y

$$C(t, t') \tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t') \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t) \leq \tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t) \quad (5.21)$$

La constante C que figura en (5.21) depende únicamente de t y t' .

Demostración. Comenzamos por considerar (5.20). Para la primera desigualdad, tomamos $L \in \mathcal{L}(t, Q_0, E)$. Entonces, dado que

$$\bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \geq L}} Q^\circ \subseteq \bigcup_{\substack{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ |I| \geq L}} I,$$

se sigue que

$$\sum_{|I| \geq L} \frac{|I|}{|Q_0|} \geq \sum_{l(Q) \geq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq t.$$

En otras palabras, $L \in \tilde{\mathcal{L}}(t, Q_0, E)$ y, en consecuencia, $L \leq \tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t)$. De esta forma, tomando el límite apropiado, obtenemos

$$\mathcal{L}_{Q_0}(t) \leq \tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t).$$

Para la desigualdad restante, tomamos $L \in \tilde{\mathcal{L}}(t, Q_0, E)$ y escribimos

$$\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) : |I| \geq L\}$$

para algún conjunto de índices adecuado A . Dado que cada I_α es un conjunto abierto contenido en Q_0° , podemos encontrar un cubo diádico $Q_\alpha \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ tal que $Q_\alpha \subseteq I_\alpha$ y

$$|Q_\alpha| \geq \frac{1}{4}|I_\alpha| \geq \frac{1}{4}L.$$

Luego,

$$\sum_{l(Q) \geq \frac{1}{4}L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq \sum_{\alpha \in A} \frac{|Q_\alpha|}{|Q_0|} \geq \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in A} \frac{|I_\alpha|}{|Q_0|} = \frac{1}{4} \sum_{|I| \geq L} \frac{|I|}{|Q_0|} \geq \frac{1}{4}t,$$

lo cual implica que $\frac{1}{4}L \in \mathcal{L}(\frac{1}{4}t, Q_0, E)$ y, además, que

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}(t) \leq 4\mathcal{L}_{Q_0}(\frac{1}{4}t).$$

Consideremos ahora (5.21). En vista a demostrar la segunda desigualdad, tomemos $L \in \mathcal{J}(t, E, Q_0)$. Dado que

$$\bigcup_{\substack{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \\ |I| \leq L}} I \subseteq \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq L}} Q,$$

tenemos que

$$\sum_{l(Q) \leq L} \frac{|Q|}{|Q_0|} \geq \sum_{|I| \leq L} \frac{|I|}{|Q_0|} \geq t.$$

En otras palabras, $L \in \mathcal{S}(t, Q_0, E)$ y, por lo tanto, $\mathcal{S}_{Q_0}(t) \leq L$. De aquí se deduce que

$$\mathcal{S}_{Q_0}(t) \leq \tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t).$$

Para probar la desigualdad restante, tomemos $0 < L < \mathcal{S}_{Q_0}(t')$ y definamos $\mathcal{A} := \{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) : |I| > L\}$. Por hipótesis, tenemos que

$$\sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \setminus \mathcal{A}} \frac{|I|}{|Q_0|} < t'.$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\mathcal{D}_E(Q_0) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0)} \{Q : Q \subseteq I\},$$

dado que para todo $Q \in \mathcal{D}_E(Q_0)$ existe un único $I \in \mathcal{C}_E(Q_0)$ tal que $Q \subseteq I$. Además, si $I \in \mathcal{A}$ y $\#$ denota la medida de contar, afirmamos que

$$\#\left(\left\{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) : Q \subseteq I \wedge \frac{1}{2^{k+1}}L < l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L\right\}\right) \leq 2$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Para verificar esta afirmación, supongamos que Q_i pertenece a la colección anterior para $i \in \{1, 2, 3\}$ y escribamos $I = (a, b)$. Se sigue que, dado que $\pi Q_i \cap E \neq \emptyset$ e $I \cap E = \emptyset$, al menos dos de estos cubos intersecan un mismo extremo de I . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que πQ_1 y πQ_2 contienen ambos a a , lo que implica $\pi Q_1 \cap \pi Q_2 \neq \emptyset$. Pero entonces, como $l(Q_1) = l(Q_2)$, necesariamente $\pi Q_1 = \pi Q_2$. Dado que Q_1 y Q_2 no intersecan a E , esto último implica también que $Q_1 = Q_2$ y la afirmación queda demostrada.

Así, para $I \in \mathcal{A}$ y $k \in \mathbb{N}_0$, se tiene

$$\left| \bigcup_{\substack{Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} Q \right| = \sum_{\substack{Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} |Q| = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{\substack{Q \subseteq I \\ \frac{1}{2^{j+1}}L < l(Q) \leq \frac{1}{2^j}L}} |Q| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}}L = \frac{1}{2^{k-2}}L < \frac{1}{2^{k-2}}|I|.$$

Eligiendo $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $t' + \frac{1}{2^{k-2}} < t$, obtenemos

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} |Q| = \sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0)} \sum_{\substack{Q: Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} |Q| = \sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \setminus \mathcal{A}} \sum_{\substack{Q: Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} |Q| + \sum_{I \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{Q: Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k}L}} |Q|.$$

Para la primera suma, podemos realizar la estimación

$$\sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \setminus \mathcal{A}} \sum_{\substack{Q: Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k} L}} |Q| \leq \sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q_0) \setminus \mathcal{A}} |I| < t' |Q_0|.$$

Para la restante,

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{Q: Q \subseteq I \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k} L}} |Q| < \frac{1}{2^{k-2}} \sum_{I \in \mathcal{A}} |I| \leq \frac{1}{2^{k-2}} |Q_0|.$$

En consecuencia,

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_E(Q_0) \\ l(Q) \leq \frac{1}{2^k} L}} |Q| \leq (t' + \frac{1}{2^{k-2}}) |Q_0| < t |Q_0|,$$

lo que implica que

$$\frac{1}{2^k} L < \mathcal{S}_{Q_0}(t).$$

Tomando el límite cuando $L \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t')$, llegamos a

$$\frac{1}{2^k} \tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}(t') \leq \mathcal{S}_{Q_0}(t).$$

■

Debido al [Lema 5.28](#), será suficiente caracterizar el comportamiento de las funciones $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_0}$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_0}$ para deducir las desigualdades que figuran en la [Proposición 5.27](#). Como se mencionó anteriormente, el enfoque a seguir será de carácter probabilístico. Por este motivo, es conveniente recordar las siguientes definiciones y notaciones elementales. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entendemos por **variable aleatoria** en este espacio a una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que sea $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -medible. Llamamos **función de distribución de X** a

$$F_X(x) := P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x).$$

La **esperanza** y la **varianza** de X se definen según

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

y

$$\text{Var } X := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2],$$

respectivamente. En el caso de un subconjunto de la recta no vacío E , y dado un cubo $Q_0 \subseteq \mathbb{R}$, consideramos la función $X_Q : Q \rightarrow (0, \infty)$ definida por la asignación

$$X_Q(\omega) := \sum_{I \in \mathcal{C}_E(Q)} |I| \mathbb{1}_I(\omega).$$

Es decir, X_Q asigna a cada ω en Q la longitud de la componente conexa de $Q^\circ \setminus E$ que contiene a dicho punto (o bien asigna el valor cero si el punto no pertenece a ninguna de estas componentes). Notemos que X_Q es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(Q, \mathcal{B}(Q), P_Q)$, donde $\mathcal{B}(Q)$ es la σ -álgebra de Borel en Q y

$$P_Q(S) = |Q|^{-1} |S|$$

para todo $S \in \mathcal{B}(Q)$. A continuación, comenzaremos a abordar la primera afirmación de la [Proposición 5.27](#) empleando esta nueva notación.

Lema 5.29. Sea $E = E(\{1 - \frac{1}{2n}\})$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}X_{Q_n} \mathbb{E}X_{Q_n}^{-1} \leq C \quad (5.22)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_m > 0$ tales que $P_{Q_n}(X_{Q_n} = x_i) = p_i$, con $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Entonces, $X_{Q_{n+1}}(Q_{n+1}) = \{x_1, \dots, x_m, c_{n+1}x_1, \dots, c_{n+1}x_m\}$, con $P_{Q_n}(X_{Q_{n+1}} = x_i) = \left(\frac{2}{2+c_{n+1}}\right)p_i$ y $P_{Q_n}(X_{Q_{n+1}} = c_{n+1}x_i) = \left(\frac{c_{n+1}}{2+c_{n+1}}\right)p_i$. Por lo tanto, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_{Q_{n+1}}^\theta &= \sum_{y \in X_{Q_{n+1}}(Q_{n+1})} y^\theta P_{Q_{n+1}}(X_{Q_{n+1}} = y) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{2+c_{n+1}} x_i^\theta p_i + \frac{c_{n+1}}{2+c_{n+1}} c_{n+1}^\theta x_i^\theta p_i \right) \\ &= \left(\frac{2+c_{n+1}^{1+\theta}}{2+c_{n+1}} \right) \sum_{i=1}^m x_i^\theta p_i \\ &= \left(\frac{2+c_{n+1}^{1+\theta}}{2+c_{n+1}} \right) \mathbb{E}X_{Q_n}^\theta. \end{aligned}$$

Usando esta fórmula recursiva con $\theta = \pm 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_{Q_n} \mathbb{E}X_{Q_n}^{-1} &= \left(\frac{2+c_n^2}{2+c_n} \right) \left(\frac{3}{2+c_n} \right) \mathbb{E}X_{Q_{n-1}} \mathbb{E}X_{Q_{n-1}}^{-1} \\ &\vdots \\ &= \mathbb{E}X_{Q_0} \mathbb{E}X_{Q_0}^{-1} \prod_{i=1}^n \frac{3(2+c_i^2)}{(2+c_i)^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{3(2+c_i^2)}{(2+c_i)^2}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que $X_{Q_0} = 1$. Reemplazando $c_i = 1 - \frac{1}{2i}$ en la fórmula anterior y teniendo en cuenta que $\log(x+1) \leq x$ para todo $x > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_{Q_n} \mathbb{E}X_{Q_n}^{-1} &= \prod_{i=1}^n \frac{3(2+c_i^2)}{(2+c_i)^2} = \prod_{i=1}^n \frac{3(2+(1-\frac{1}{2i})^2)}{(3+\frac{1}{2i})^2} = \prod_{i=1}^n \frac{36i^2-12i+3}{36i^2-12i+1} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{2}{36i^2-12i+1} \right) \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{2}{36i^2-12i+1} \right)} \\ &\leq e^{\sum_{i=1}^n \frac{2}{36i^2-12i+1}} \\ &\leq e^{\sum_{i=1}^\infty \frac{2}{(6i-1)^2}} \\ &= e^{\frac{2}{25} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2}}. \end{aligned}$$

Luego, basta con tomar

$$C = e^{\frac{2}{75}}$$

en (5.22). ■

Lema 5.30. Sean $E = E(\{1 - \frac{1}{2^n}\})$ y $0 < s < (1 + 2^n)^{-1}$. Entonces, existe una constante $C_0 > 0$ que depende únicamente de s tal que

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Q_n}(s) \leq C_0 \tilde{\mathcal{S}}_{Q_n}(s)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Fijemos $0 < s < (1 + 2^n)^{-1}$ y sea k un número positivo cualquiera. Observemos que

$$P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq k \mathbb{E}X_{Q_n}) = P_{Q_n}\left(\bigcup_{|I| \geq k \mathbb{E}X_{Q_n}} I\right) = \sum_{|I| \geq k \mathbb{E}X_{Q_n}} \frac{|I|}{|Q_n|}.$$

Ahora bien, si $k > s^{-1}$, podemos emplear la desigualdad de Markov para obtener

$$\sum_{|I| \geq k \mathbb{E}X_{Q_n}} \frac{|I|}{|Q_n|} = P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq k \mathbb{E}X_{Q_n}) \leq \frac{1}{k} < s,$$

lo que implica que $\tilde{\mathcal{L}}_{Q_n}(s) \leq k \mathbb{E}X_{Q_n}$. De manera análoga, dado que

$$P_{Q_n}\left(X_{Q_n}^{-1} \geq \frac{\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1}}{k'}\right) = P_{Q_n}\left(X_{Q_n} \leq \frac{k'}{\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1}}\right) = \sum_{|I| \leq k' (\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1})^{-1}} \frac{|I|}{|Q_n|},$$

podemos aplicar la desigualdad de Markov a la variable $X_{Q_n}^{-1}$ para obtener

$$\sum_{|I| \leq k' (\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1})^{-1}} \frac{|I|}{|Q_n|} = P_{Q_n}\left(X_{Q_n}^{-1} \geq \frac{\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1}}{k'}\right) \leq k' < s,$$

si elegimos $0 < k' < s$. Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{S}}_{Q_n}(s) \geq k' (\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1})^{-1}$. En consecuencia, si C es la constante dada por el Lema 5.29,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{Q_n}(s) \leq k \mathbb{E}X_{Q_n} \leq kC(\mathbb{E}X_{Q_n}^{-1})^{-1} \leq \frac{k}{k'} C \tilde{\mathcal{S}}_{Q_n}(s).$$

■

Demostración de 5.27.1. Se sigue inmediatamente de la aplicación de los Lemas 5.28 y 5.30. ■

En el caso de la demostración de 5.27.2, resulta conveniente trabajar con la variable aleatoria definida según

$$Y_Q(\omega) = -\log_2 X_Q(\omega),$$

la cual, al considerar el conjunto $E = E(\{\frac{1}{2}\})$, asigna a cada $\omega \in Q$ un entero k tal que la componente conexa I que contiene a ω tiene longitud 2^{-k} . La ventaja de trabajar con esta variable aleatoria, en vez de con la anterior X_Q , radica en el hecho que Y_Q posee una distribución binomial, que a su vez puede ser aproximada por medio de la distribución normal estándar, como veremos más adelante²⁰.

Verifiquemos el comportamiento binomial de Y_Q para $Q = Q_n$. Dado que $X_{Q_n}(Q_n) \subseteq \{\frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}_0\}$, se tiene que $Y_{Q_n}(Q_n) \subseteq \mathbb{N}_0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, tal y como se mencionó previamente.

²⁰Esta distribución binomial de los poros de $E(\{\frac{1}{2}\})$ fue de hecho observada por Mudarra en [Mud25].

Además, puesto que $E_0 = \{0, 1\}$, se sigue que $X_{Q_0} \equiv 1$ y $Y_{Q_0} \equiv 0$. Consideremos ahora las funciones

$$N_n(k) := \#\left\{I \in \tilde{\mathcal{D}}_E(Q_n) : |I| = \frac{1}{2^k}\right\}.$$

A partir de las observaciones previas, sabemos que $N_0(0) = 1$ y $N_0(k) = 0$ para todo $k > 0$. Por construcción del conjunto $E = E(\{\frac{1}{2}\})$, deducimos que $N_n(0) = 2N_{n-1}(0)$, lo cual, combinado con la condición inicial $N_0(0) = 1$, da lugar a $N_n(0) = 2^n$. A continuación, afirmamos que

$$N_n(k) = \binom{n}{k} 2^{n-k} \mathbb{1}_{[0,n]}(k)$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dado que la afirmación se cumple para $n = 0$, procedemos por inducción sobre n . Nuevamente, por la construcción de E , se tiene que $N_n(k) = 2N_{n-1}(k) + N_{n-1}(k-1)$ para todo n , de modo que, sustituyendo la hipótesis inductiva para $k \leq n$, obtenemos la relación recursiva

$$\begin{aligned} N_n(k) &= 2N_{n-1}(k) + \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} \mathbb{1}_{[0,n-1]}(k-1) \\ &= 2 \left[2N_{n-2}(k) + \binom{n-2}{k-1} 2^{n-k-1} \mathbb{1}_{[0,n-2]}(k-1) \right] + \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} \mathbb{1}_{[0,n-1]}(k-1) \\ &\vdots \\ &= 2^{n+1-k} N_{k-1}(k) + 2^{n-k} \sum_{l=1}^{n+1-k} \binom{n-l}{k-1} \mathbb{1}_{[0,n-l]}(k-1) \\ &= 2^{n-k} \sum_{l=1}^{n+1-k} \binom{n-l}{k-1} \\ &= 2^{n-k} \sum_{l=k-1}^{n-1} \binom{l}{k-1} \\ &= 2^{n-k} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Si $k > n$, claramente se cumple que $N_n(k) = 2N_{n-1}(k) + N_{n-1}(k) = 0$, y por lo tanto la afirmación también es válida. Finalmente, podemos calcular la función de distribución de Y_{Q_n} como sigue.

$$\begin{aligned} P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq k) &= \sum_{l=0}^k P_{Q_n}(Y_{Q_n} = l) = \sum_{l=0}^k N_n(l) P_{Q_n}\left((0, \frac{1}{2^l})\right) \\ &= |Q_n|^{-1} \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} 2^{n-l} \mathbb{1}_{[0,n]}(l) \frac{1}{2^l} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n \sum_{l=0}^{\min\{k,n\}} \binom{n}{l} 2^{n-l} \left(\frac{1}{2}\right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\min\{k,n\}} \binom{n}{l} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-l} \left(\frac{1}{5}\right)^l. \end{aligned}$$

Esta función de distribución coincide con la distribución binomial con parámetros n y $p = \frac{1}{5}$. Empleando la notación estándar, tenemos que $Y_{Q_n} \sim \text{Bin}(n, p)$

El siguiente resultado es conocido en el área de la probabilidad como el Teorema de Berry-Esseen, que consiste en una mejora del Teorema Central del Límite, aunque con una hipótesis ligeramente más fuerte. Partiendo de una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con tercer momento finito ($\mathbb{E}X_n^3 < \infty$), este teorema provee una cota uniforme para la aproximación de la función de distribución de la suma de estas variables con respecto a la distribución normal estándar.

Teorema 5.31 ([AL06, Teorema 11.4.1]). *Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes²¹ e idénticamente distribuidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F})$ con $\mathbb{E}X_1 = \mu$, $\text{Var } X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$ y $\mathbb{E}|X_1|^3 < \infty$. Entonces,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq C \frac{\mathbb{E}|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y donde Φ denota a la función de distribución de la normal estándar. Más aún, la constante $C \in (0, \infty)$ no depende de n ni de la distribución de X_1 .

Es sabido que cualquier variable aleatoria con distribución binomial puede expresarse como una suma de variables aleatorias i.i.d. con distribución del tipo Bernoulli. En base a esto, el Teorema 5.31 aplicado al caso particular de las variables Y_{Q_n} asegura la existencia de una constante $C > 0$, independiente de n , tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq x) - \Phi\left(\frac{x - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (5.23)$$

Esto puede aprovecharse para obtener aproximaciones a los valores de las funciones $\tilde{\mathcal{L}}$ y $\tilde{\mathcal{S}}$ de la siguiente forma.

Demostración de 5.27.2. Fijemos $0 < t < \frac{1}{8}$ y comencemos reescribiendo las expresiones de las funciones $\tilde{\mathcal{L}}$ y $\tilde{\mathcal{S}}$ en términos de la distribución de Y_{Q_n} . Dado $L \geq 0$, recordemos que $P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq L) = P_{Q_n}(\{\omega \in Q_n : |I| \geq L, \text{ donde } \omega \in I \in \mathcal{C}_E(Q_n)\}) = \sum_{|I| \geq L} P_{Q_n}(I) = \sum_{|I| \geq L} \frac{|I|}{|Q_n|}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{Q_n}(t) &= \sup \left\{ L \geq 0 : \sum_{\substack{I \in \mathcal{C}_E(Q_n) \\ |I| \geq L}} \frac{|I|}{|Q_n|} \geq t \right\} = \sup \{ L \in (0, 1) : P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq L) \geq t \} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}_0 \text{ y } P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq \frac{1}{2^k}) \geq t \right\} \\ &= 2^{-\min \{ k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(X_{Q_n} \geq \frac{1}{2^k}) \geq t \}} \\ &= 2^{-\min \{ k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq k) \geq t \}}. \end{aligned}$$

De manera análoga, puede demostrarse que

$$\tilde{\mathcal{S}}_{Q_n}(t) = 2^{-\max \{ k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \geq k) \geq t \}}.$$

Luego, por (5.20) y (5.21), se sigue que

$$\frac{\mathcal{L}_{Q_n}(t)}{\mathcal{S}_{Q_n}(t)} \geq \frac{1}{4} \frac{\tilde{\mathcal{L}}_{Q_n}(4t)}{\tilde{\mathcal{S}}_{Q_n}(t)} = \frac{1}{4} 2^{\max \{ k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \geq k) \geq t \} - \min \{ k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq k) \geq 4t \}}. \quad (5.24)$$

²¹Para una definición del concepto de independencia de variables aleatorias, nos referimos a [AL06, Capítulo 7].

Para estimar los exponentes anteriores, denotemos por z_r a la función cuantil de la normal estándar en r ; es decir, esta función está definida por la condición $\Phi(z_r) = r$ para todo $0 < r < 1$. A continuación, elegimos números ξ_1 y ξ_2 tales que $t < \xi_1 < 4t < \xi_2 < \frac{1}{2}$. Si definimos

$$x_{1-\xi_1} := nq + (1 - z_{\xi_1})\sqrt{nq(1-q)} \quad \text{y} \quad x_{\xi_2} := nq + z_{\xi_2}\sqrt{nq(1-q)},$$

entonces, por (5.23), se sigue que

$$|P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq x_{\xi_2}) - \xi_2| \leq C n^{-1/2}.$$

En particular, eligiendo $n > C^2(\xi_2 - 4t)^{-2}$, se tiene $P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq x_{\xi_2}) \geq 4t$ y

$$\min\{k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq k) \geq 4t\} \leq x_{\xi_2}.$$

Por otro lado,

$$|P_{Q_n}(Y_{Q_n} > x_{1-\xi_1}) - \xi_1| = |P_{Q_n}(Y_{Q_n} \leq x_{1-\xi_1}) - (1 - \xi_1)| \leq C n^{-1/2},$$

de forma tal que tomar $n > C^2(\xi_1 - t)^{-2}$ implica $P_{Q_n}(Y_{Q_n} > x_{1-\xi_1}) \geq t$ y

$$\max\{k \in \mathbb{N}_0 : P_{Q_n}(Y_{Q_n} \geq k) \geq t\} \geq x_{1-\xi_1}.$$

Finalmente, observemos que $\xi_1 < \xi_2 < 1 - \xi_1$ y, en consecuencia, $z_{1-\xi_1} - z_{\xi_2} > 0$. Por lo tanto, combinando (5.24) con las estimaciones anteriores obtenemos

$$\frac{\mathcal{L}_{Q_n}(t)}{\mathcal{S}_{Q_n}(t)} \geq \frac{1}{4} 2^{x_{1-\xi_1} - x_{\xi_2}} = \frac{1}{4} 2^{(z_{1-\xi_1} - z_{\xi_2})\sqrt{nq(1-q)}} \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

■

Caracterización de pesos distancia laterales

En este capítulo, resultados previos concernientes con clases de Muckenhoupt, nociones de porosidad de conjuntos y su interrelación serán reevaluados y sopesados en el contexto lateral de $\mathbb{R}$. En particular, se introducirá el concepto de conjuntos débilmente porosos por izquierda y débilmente porosos por derecha, así como se demostrará que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ verifica $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R}) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R})$ (respectivamente $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^-(\mathbb{R}) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R})$) si y solo si E es débilmente poroso por derecha (izquierda). Asimismo, se corroborará que aquellos conjuntos que satisfagan ambas caracterizaciones laterales de porosidad corresponden precisamente a los conjuntos débilmente porosos usuales de $\mathbb{R}$. Cabe mencionar que el retorno a un entorno de trabajo euclídeo conlleva una significativa reducción de complejidad a nivel geométrico en comparación con capítulos anteriores contextualizados en espacios de tipo homogéneo. Ciertamente, las principales dificultades a sortear en las páginas siguientes no serán de índole geométrico, sino más bien analíticas. Los resultados principales de este capítulo se encuentran en [Aim+25].

Contenidos

6.1	Operadores maximales y pesos en el contexto lateral	156
6.2	Porosidad débil lateral	163
6.3	Relación entre porosidad y pesos laterales	170

6.1 Operadores maximales y pesos en el contexto lateral

La naturaleza de cuerpo ordenado de $\mathbb{R}$ da significado al concepto de *dirección* o *sentido* en la recta real. Por este motivo, no es de extrañar que un sinnúmero de objetos matemáticos elementales tales como límites, derivadas o comportamientos asintóticos de funciones puedan ser interpretados naturalmente desde un punto de vista *lateral*. En lo que a nosotros nos concierne, el caso del operador maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$ no es una excepción²². Recordemos que este operador, pensado sobre el espacio $\mathbb{R}$, actúa sobre funciones localmente integrables según

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y)| dy. \quad (6.1)$$

²²De hecho, en su exposición [HL30], G. H. Hardy & J. E. Littlewood introdujeron por primera vez este operador a través de una integral cuyo dominio se extendía a izquierda del punto de estudio, en coincidencia con el operador $\mathcal{M}^-$ a introducir en (6.2).

La clase $A_1(\mathbb{R})$ corresponde a todas la clase de funciones w tales que $w \geq 0$, $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}$ lleva aplica continuamente L^1 en L^1 -débil. Para más detalles nos referimos al [Capítulo 3](#). En vista de (6.1), resulta lógico proponer, como contrapartes laterales de $\mathcal{M}$, a los operadores “hermanos”

$$M^-f(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x |f(y)| dy \quad \text{y} \quad M^+f(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)| dy, \quad (6.2)$$

donde $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$. El dominio de integración localizado ya sea a izquierda o derecha del punto x en cuestión es lo único que diferencia las definiciones de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^\pm$. Sin embargo, esta mera discrepancia tiene importantes consecuencias sobre la familia de pesos para los cuales los operadores en (6.2) resultan acotados.

El primero en considerar el problema de acotación de los operadores $\mathcal{M}^\pm$ fue E. Sawyer en [Saw86], siendo expandidos algunos de sus resultados meses después por de F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador & A. de la Torre en [MOT90]. En conjunto, estos autores introdujeron la clase $A_p^+(\mathbb{R})$ como la familia de pesos w que satisfacen la desigualdad

$$\sup_{h>0} \left(\frac{1}{h} \int_{x-h}^x w(y) dy \right) \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq C, \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R} \quad (6.3)$$

para el caso $1 < p < \infty$ y

$$M^-w(x) \leq Cw(x), \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R} \quad (6.4)$$

en el caso $p = 1$. A simple vista, ambas condiciones resultan reminiscentes de la condición $A_p(\mathbb{R})$ usual, mientras que lo mismo puede decirse de su contraparte “a izquierda”, la clase $A_p^-(\mathbb{R})$, que se define de la manera natural realizando los cambios pertinentes en (6.3) y (6.4). Nos referiremos de manera coloquial a los elementos de estos conjuntos como *pesos por derecha* o *pesos por izquierda*, según corresponda. Llegado a este punto, es conveniente resaltar que la mayor parte de los resultados a introducir en este capítulo serán enunciados exclusivamente para el caso de los pesos por derecha y con $p = 1$ ($w \in A_1^+(\mathbb{R})$), con el fin de evitar reiteraciones innecesarias y no entorpecer el desarrollo del texto; no obstante, cada uno de estos resultados pueden reformularse fácilmente para que sean válidos en el caso de los pesos por izquierda. Una forma sencilla de obtener pesos laterales, señalada ya en [Saw86], consiste en considerar el producto entre un peso de Muckenhoupt usual y una función monótona.

Ejemplo 6.1 (Obtención de pesos en $A_1^+(\mathbb{R})$). Sean $w \in A_1(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente. Notemos que, si $y \in (x-h, x)$ para ciertos $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, entonces $g(y) \leq g(x)$. Luego, podemos estimar

$$\mathcal{M}^-(gw)(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x gw \leq g(x) \mathcal{M}w(x) \leq [w]_{A_1^+(\mathbb{R})} g(x) w(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$, donde $[w]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ denota a la mejor constante para la cual se satisface (6.4). Esto es, $gw \in A_1^+(\mathbb{R})$.

De acuerdo al ejemplo anterior, tomando $g = 1$ se tiene la inclusión $A_1(\mathbb{R}) \subseteq A_1^+(\mathbb{R})$. Por otro lado, la función $v := \mathbb{1}_{[x_0, \infty)} w$ pertenece a $A_1^+(\mathbb{R})$ para todo x_0 real siempre que $w \in A_1(\mathbb{R})$. Si elegimos w no nulo, v resulta ser un peso con $v|_{(-\infty, x_0)} = 0$, esto es, v es distinto de cero y se anula en un conjunto de medida positiva. No es difícil ver que esto imposibilita que v pertenezca

a $A_p(\mathbb{R})$ para cualquier valor de p admisible²³, lo que indica que las clases de pesos laterales contienen estrictamente a las clases usuales.

Los siguientes teoremas caracterizan la acotación de los operadores $\mathcal{M}^\pm$ con respecto a las medidas inducidas por los pesos de Muckenhoupt laterales. Asimismo, introducen las propiedades básicas de estos pesos²⁴, dando lugar a una notable analogía con el caso bilátero. Optaremos por demostrar únicamente la acotación del tipo débil $(1, 1)$ de $\mathcal{M}^+$ en base a las pruebas de los trabajos [Mar93; MOT90] por varios motivos. En primer lugar, los pesos $A_1^+(\mathbb{R})$ que proveen esta acotación serán el objeto principal de estudio en este capítulo. Por otro lado, este no es un resultado sumamente conocido y se espera que su demostración permita al lector familiarizarse con los argumentos comúnmente utilizados en el área.

Teorema 6.2 (Acotación débil $(1, 1)$ de $\mathcal{M}^+$ [MOT90; Mar93]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

6.2.1. $\mathcal{M}^+$ es de tipo débil $(1, 1)$ con respecto a la medida $w(x)dx$.

6.2.2. $w \in A_1^+(\mathbb{R})$.

Demostración. Consideremos la implicación $6.2.1 \implies 6.2.2$. Dado $N \in \mathbb{N}$, sean $\Omega_N = \{x \in \mathbb{R} : w(x) \leq N\}$ y $w_N = w \mathbb{1}_{\Omega_N}$. Definimos además F_N y H_N como los conjuntos formados por los puntos de Lebesgue de w_N y $\mathbb{1}_{\Omega_N}$, respectivamente. Si ahora tomamos

$$F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} (F_N \cap H_N),$$

claramente $|\mathbb{R} \setminus F| = 0$. Tomemos $x \in F$, $a > 0$ y $0 < \varepsilon < a$. Supongamos que $N \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande como para asegurar que $w(x) \leq N$. Para $f_N := \mathbb{1}_{\Omega_N \cap (x, x+\varepsilon)}$ y $y \in (x - a, x)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+ f_N(y) &= \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_N(t) dt \\ &\geq \frac{1}{2a} \int_y^{y+2a} \mathbb{1}_{\Omega_N \cap (x, x+\varepsilon)}(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_x^{x+\varepsilon} \mathbb{1}_{\Omega_N}(t) dt \\ &=: \lambda_0. \end{aligned}$$

Luego, vale la inclusión $(x - a, x) \subseteq \{\mathcal{M}^+ f_N > \lambda_0\}$ y, por la acotación débil $(1, 1)$ de $\mathcal{M}^+$, deducimos

$$\int_{x-a}^x w \leq \int_{\{\mathcal{M}^+ f_N > \lambda_0\}} w \leq \frac{C}{\lambda_0} \int_{\mathbb{R}} f_N w = 2Ca \left(\int_x^{x+\varepsilon} \mathbb{1}_{\Omega_N} \right)^{-1} \int_x^{x+\varepsilon} w_N.$$

²³Si v es un peso en $\mathbb{R}$ para el cual tanto $A = \{x : v(x) = 0\}$ como $B = \{x : v(x) > 0\}$ poseen medida de Lebesgue positiva, es posible hallar $x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $|(x-r, x+r) \cap A| > 0$ y $|(x-r, x+r) \cap B| > 0$, lo que implica $\int_{(x-r, x+r)} v dy > 0 = \text{ess inf}_{(x-r, x+r)} v$, por lo que $v \notin A_1(\mathbb{R})$. Análogamente, $v \notin A_p(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$ puesto que $(\int_{(x-r, x+r)} v dy)(\int_{(x-r, x+r)} v^{-\frac{1}{p-1}} dy)^{p-1} = \infty$.

²⁴En la referencia [MOT90] de la cual provienen estos resultados, el tratamiento realizado es más general. Allí, se estudian pares de pesos (u, v) pertenecientes a ciertas clases $A_p^+(g)$, donde g representa una función positiva y localmente integrable que modula las integrales (6.3) y (6.4). A fines de contextualizar, cabe mencionar que estas clases coinciden con las aquí presentadas tomando $u = v$ y $g = 1$.

Recordando que $x \in F$ y que $w(x) \leq N$, al tomar los límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ y $N \rightarrow \infty$ de la desigualdad de arriba obtenemos

$$\int_{x-a}^x w \leq 2Cw(x).$$

Como el valor de a fue elegido arbitrariamente, esto demuestra que $\mathcal{M}^+w \lesssim w$ en casi todo punto.

Supongamos ahora que se cumple 6.2.2. Para demostrar 6.2.1, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que f es no negativa, acotada y de soporte compacto para verificar la acotación débil de $\mathcal{M}^+$. Dado $\lambda > 0$, denotamos $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^+f(x) > \lambda\}$. Siguiendo los lineamientos en [HS65, Lema 21.75], se puede ver que E_λ es abierto y que

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j),$$

donde (a_j, b_j) son intervalos acotados y disjuntos de pares tales que

$$\lambda \leq \frac{1}{b_j - x} \int_x^{b_j} f, \quad \text{para todo } x \in [a_j, b_j).$$

Sean $a = a_j$ y $b = b_j$ para $j \in \mathbb{N}$ fijo. Notemos que es suficiente verificar que

$$\int_a^b w \leq \frac{C}{\lambda} \int_a^b fw,$$

para cierta constante C independiente de a, b y f . Consideremos la partición $(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_{k-1}, x_k)$ dada por la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definida como

$$x_0 := a \quad \text{y} \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \int_{x_k}^b f.$$

Observemos que, a partir de la definición de $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, se deduce que

$$\int_{x_{k-1}}^b f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f + \int_{x_k}^b f = 2 \int_{x_k}^b f = 2 \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f + \int_{x_{k+1}}^b f \right) = 4 \int_{x_k}^{x_{k+1}} f.$$

Combinando esto con las propiedades del intervalo (a, b) , se sigue que

$$\lambda \leq \frac{1}{b - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^b f = \frac{4}{b - x_{k-1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f.$$

Luego, usamos la hipótesis sobre el peso w para estimar

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} w &\leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{4}{b - x_{k-1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right) \int_{x_{k-1}}^{x_k} w \\ &\leq \frac{4}{\lambda} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) \left(\frac{1}{t - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^t w \right) dt \\ &\leq \frac{4[w]_{A_1^+(\mathbb{R})}}{\lambda} \int_{x_k}^{x_{k+1}} fw. \end{aligned}$$

donde $[w]_{A_1^+(\mathbb{R})}$ es la constante óptima de la condición (6.4). De lo anterior se deduce inmediatamente que

$$\int_a^b w \leq \frac{4[w]_{A_1^+(\mathbb{R})}}{\lambda} \int_a^b fw,$$

que equivale al tipo débil de M^+ en (a, b) , tal y como debía demostrarse. ■

La demostración de las acotaciones (p, p) para $p > 1$ así como de las siguientes propiedades de los pesos laterales pueden ser consultadas, al igual que la prueba anterior, en la referencia indicada.

Teorema 6.3 (Acotación (p, p) de $\mathcal{M}^+$ [MOT90]). *Dado $1 < p < \infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

6.3.1. $\mathcal{M}^+$ es de tipo débil (p, p) con respecto a la medida $w(x)dx$.

6.3.2. $\mathcal{M}^+$ es de tipo fuerte (p, p) con respecto a la medida $w(x)dx$.

6.3.3. $w \in A_p^+(\mathbb{R})$.

Teorema 6.4 (Propiedades de $A_p^+(\mathbb{R})$ [MOT90]). *Para todo $1 < p < \infty$, vale lo siguiente.*

6.4.1. $w \in A_p^+(\mathbb{R})$ si y solo si $w = w_0 w_1^{1-p}$ donde $w_0 \in A_1^+(\mathbb{R})$ y $w_1 \in A_1^-(\mathbb{R})$.

6.4.2. Si $w \in A_p^+(\mathbb{R})$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $p - \varepsilon > 1$ y $w \in A_{p-\varepsilon}^+(\mathbb{R})$.

6.4.3. Si $w \in A_1^+(\mathbb{R})$, entonces existen $\gamma \in (0, 1)$, una función k con $k, k^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R})$, y una función f tales que $w = k(M^- f)^\gamma$.

6.4.4. $A_p(\mathbb{R}) = A_p^-(\mathbb{R}) \cap A_p^+(\mathbb{R})$.

Los primeros tres incisos del Teorema 6.4 equivalen a resultados bien conocidos para los pesos de Muckenhoupt como lo son el Teorema de Factorización de Jones (inciso 6.4.1) o la propiedad de “automejora” (*self-improving*) de los pesos A_p (inciso 6.4.2). El inciso 6.4.4, por otra parte, da a conocer una importante relación entre los pesos laterales y bilaterales, a saber, w es un peso bilátero si y solo si es simultáneamente un peso por izquierda y un peso por derecha. En particular, si lo que nos interesa es determinar cuándo las funciones de la forma $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$ (donde $E \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$) resultan ser pesos A_1 tanto por izquierda como por derecha, es suficiente restringir nuestra atención al caso en el que éstas funciones pertenezcan a los conjuntos $A_1^-(\mathbb{R}) \cap L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ y $A_1^+(\mathbb{R}) \cap L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Otro motivo por el cual restringirnos al caso de los pesos distancia laterales que sean localmente integrables es que buscamos una caracterización más general que la de porosidad débil propuesta en [And+24] y al mismo tiempo semejante. Si $\text{dist}(\cdot, E) \notin L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, entonces el conjunto E podría tener medida de Lebesgue positiva, lo cual contradice cualquier noción de porosidad conocida. Debido a esto, nos proponemos buscar una solución al próximo problema.

Problema 6.5. Caracterizar la familia de conjuntos $E \subseteq \mathbb{R}$ para los cuales existe $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^\pm(\mathbb{R}) \cap L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$.

En el trabajo [RS97], los autores muestran que la eventual integrabilidad local de un peso lateral está relacionada con el comportamiento de éste a valores extremos de $x \in \mathbb{R}$. Más precisamente, afirman que dado $w \in A_1^+(\mathbb{R})$, existen puntos $-\infty \leq a_w \leq b_w \leq \infty$ tales que

$$\begin{cases} w(x) = 0 & x \in (-\infty, a_w], \\ 0 < w(x) < \infty & x \in (a_w, b_w), \\ w(x) = \infty & x \in [b_w, \infty). \end{cases} \quad (6.5)$$

En efecto, basta con tomar $a_w := \sup\{x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^x w = \infty\}$ y $b_w := \text{ess inf}\{x \in \mathbb{R} : w(x) = \infty\}$. En base a esto, la integrabilidad local de w queda determinada como sigue.

Proposición 6.6. Sean $w \in A_1^+(\mathbb{R})$ y b_w como en (6.5). Entonces, $w \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ si y solo si $b_w = \infty$.

Demostración. Claramente, si $w \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ entonces

$$|\{x \in \mathbb{R} : w(x) = \infty\}| = 0$$

y necesariamente $b_w = \infty$. Ahora bien, si tuviéramos que w no es localmente integrable, debería existir un intervalo (a, b) tal que $\int_a^b w = \infty$. Pero en este caso, para casi todo $x > b$, tendríamos que

$$\infty = \frac{1}{x-a} \int_a^x w \leq \mathcal{M}^- w(x) \leq [w]_{A_1^+(\mathbb{R})} w(x).$$

Luego, $b_w \leq b < \infty$, por lo que vale la recíproca. ■

Observemos que la propiedad de integrabilidad local requerida en el Problema 6.5 obliga a E a ser un conjunto nulo, tal y como lo es cualquier conjunto débilmente poroso en la recta. Pero las similitudes entre los conjuntos que son solución a este problema y los débilmente porosos no se limitan a esta propiedad. Efectivamente, demostraremos en las páginas siguientes que existe una noción de *porosidad débil lateral* que caracteriza por completo a los conjuntos E que son soluciones al problema planteado en este capítulo. Más aún, como se adelantó previamente, los conjuntos E que cumplan ambas condiciones de porosidad lateral son exactamente los conjuntos débilmente porosos.

Para facilitar el estudio de los pesos A_1 laterales, es conveniente contar con una versión alternativa de la condición A_1^+ similar a la utilizada en capítulos anteriores. Dado un intervalo abierto I con extremos $a < b$, su centro z toma el valor $\frac{a+b}{2}$. A continuación, consideramos los intervalos I^- y I^+ que representan las mitades izquierda y derecha de I , respectivamente. Para ser más precisos, definimos $I^- := (a, z)$ y $I^+ := [z, b)$, con lo que resulta $I = I^- \cup I^+$. Utilizando esta notación, podemos obtener las siguientes versiones de la condición A_1^+ .

Teorema 6.7. Dado un peso w en $\mathbb{R}$, equivalen

6.7.1. w pertenece a $A_1^+(\mathbb{R})$;

6.7.2. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|I^-|} \int_{I^-} w(y) dy \leq C \text{ ess inf}_{x \in I^+} w(x), \text{ para todo intervalo abierto } I \subseteq \mathbb{R}; \quad (6.6)$$

6.7.3. Existe una constante $C' > 0$ tal que para cada terna $a < b < c$ se tiene

$$\frac{1}{c-a} \int_a^b w(y) dy \leq C' \text{ ess inf}_{x \in (b,c)} w(x).$$

Demostración.

(6.7.1 $\implies$ 6.7.2): Supongamos que w satisface (6.4) con constante $C > 0$. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : M^- w(x) > C w(x)\}$ y definamos $\tilde{w}(x) = w(x)$ para $x \notin A$ y $\tilde{w}(x) = \infty$ en caso contrario. Claramente, $w(x) = \tilde{w}(x)$ para casi todo x , mientras que $M^- w(x) = M^- \tilde{w}(x)$ y $M^- \tilde{w}(x) \leq C \tilde{w}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\tilde{w}$ satisface la condición $A_1^+(\mathbb{R})$ en todo punto con constante C y, si I es un intervalo abierto con $|I| = h$, se sigue que para todo $x \in I^+$

$$\frac{1}{|I^-|} \int_{I^-} w(y) dy = \frac{1}{|I^-|} \int_{I^-} \tilde{w}(y) dy = \frac{2}{h} \int_{I^-} \tilde{w}(y) dy \leq \frac{2}{h} \int_{x-h}^x \tilde{w}(y) dy \leq 2C \tilde{w}(x).$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{|I^-|} \int_{I^-} w(y) dy \leq 2C \inf_{x \in I^+} \tilde{w}(x) = 2C \inf_{x \in I^+} w(x)$$

y el resultado se obtiene al renombrar adecuadamente la constante C .

(6.7.2 $\implies$ 6.7.3): Supongamos primero que $c - b \leq b - a$. Si definimos $I = (a, 2b - a)$, entonces $I^- = (a, b)$ y $(b, c) \subseteq I^+$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-a} \int_a^b w(y) dy &= \frac{|I^-|}{c-a} \frac{1}{|I^-|} \int_{I^-} w(y) dy \\ &\leq C \frac{|I^-|}{c-a} \operatorname{ess\,inf}_{x \in I^+} w(x) \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in I^+} w(x) \leq C \operatorname{ess\,inf}_{x \in (b,c)} w(x). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso $c - b > b - a$. Tomemos $x_0 = c$ y definamos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mediante $x_n = \frac{a+x_{n-1}}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, debe existir algún número natural N tal que $x_{N+1} \leq b < x_N < x_{N-1} < \dots < x_0 = c$. Denotemos, por conveniencia, $y_n = x_n$ para $0 \leq n \leq N$ y $y_{N+1} = b$. Se tiene que $\inf_{x \in (b,c)} w(x) = \inf_{x \in (y_k, y_{k-1})} w(x)$, para algún $k \in \{1, \dots, N+1\}$. Además, notemos que $y_{k-1} - y_k \leq a - y_k$, de modo que si I es un intervalo tal que $I^- = (a, y_k)$, entonces $(y_{k-1}, y_k) \subseteq I^+$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-a} \int_a^b w(y) dy &\leq \frac{1}{c-a} \int_a^{y_k} w(y) dy \\ &\leq \frac{1}{y_k - a} \int_a^{y_k} w(y) dy \leq C \inf_{x \in (y_{k-1}, y_k)} w(x) = C \inf_{x \in (b,c)} w(x). \end{aligned}$$

(6.7.3 $\implies$ 6.7.1): Dado $N \in \mathbb{N}$, definimos $w_N(x) = \min\{w(x), N\}$. Usando las estimaciones $w_N(x) \leq w(x)$ y $w_N(x) \leq N$ es fácil ver que $\frac{1}{c-a} \int_a^b w_N(y) dy \leq \tilde{C} \min\{N, \inf_{x \in (b,c)} w(x)\}$ para toda terna $a < b < c$, donde $\tilde{C} = \min\{1, C\}$. Si b y c son tales que $\inf_{x \in (b,c)} w(x) \geq N$ y tomamos A como el conjunto $\{x \in (b, c) : w(x) < N\}$, entonces $|A| = 0$. Esto implica que

$$\frac{1}{c-a} \int_a^b w_N(y) dy \leq \tilde{C} N = \tilde{C} \inf_{x \in (b,c) \setminus A} w_N(x) = \tilde{C} \inf_{x \in (b,c)} w_N(x).$$

Por otro lado, si $\inf_{x \in (b,c)} w(x) < N$, entonces

$$\frac{1}{c-a} \int_a^b w_N(y) dy \leq \tilde{C} \inf_{x \in (b,c)} w(x) = \tilde{C} \inf_{x \in (b,c)} w_N(x).$$

Hemos comprobado por tanto que w_N satisface 6.7.3 con la misma constante $\tilde{C}$ que w , independientemente del valor de N . Además, dado que w_N está acotado, tenemos que $w_N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} w_N(y) dy \rightarrow w_N(x)$ cuando $h \rightarrow 0^+$ para casi todo x por el teorema de diferenciación de Lebesgue. En consecuencia, si $x > a$ y $h > 0$,

$$\frac{1}{x+h-a} \int_a^x w_N(y) dy \leq \tilde{C} \inf_{y \in (x, x+h)} w_N(y) \leq \frac{\tilde{C}}{h} \int_x^{x+h} w_N(y) dy.$$

Tomando el límite cuando $h \rightarrow 0^+$ obtenemos $\frac{1}{x-a} \int_a^x w_N(y) dy \leq \tilde{C} w_N(x)$, y luego, tomando nuevamente el límite cuando $N \rightarrow \infty$ y usando convergencia monótona, se obtiene $\frac{1}{x-a} \int_a^x w(y) dy \leq \tilde{C} w(x)$, lo que implica 6.7.1. $\blacksquare$

Evidentemente, la condición (6.6) se asemeja más a la definición de pesos A_1 considerada en capítulos anteriores y será, de ahora en más, la utilizada para estudiar la porosidad de conjuntos que posean pesos distancia laterales asociados.

6.2 Porosidad débil lateral

En base a todas las analogías expuestas hasta el momento entre las teorías clásica y lateral de los pesos de Muckenhoupt, no es de extrañarse que exista una noción de *porosidad débil lateral* que caracterice a los conjuntos E tales que exista $\alpha > 0$ con $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R})$. Más todavía, teniendo en cuenta las contenciones $A_1(\mathbb{R}) \subseteq A_1^\pm(\mathbb{R})$, deberíamos tener que todo conjunto débilmente poroso es asimismo débilmente poroso lateral. A fines de tener presente el concepto clásico de porosidad débil en $\mathbb{R}$ y facilitar la búsqueda de nuevas similitudes con su contraparte lateral, comenzamos esta sección con las siguientes definiciones, que son meramente adaptaciones de las dadas en los Capítulos 1 y 4.

Definición 6.8. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y I un intervalo arbitrario²⁵ con extremos $a < b$. Denotamos

$$\Lambda_E(I) = \{s > 0 : \exists y \in I \text{ tal que } (y - s, y + s) \subseteq I \setminus E\}$$

(en palabras, $\Lambda_E(I)$ colecciona los “radios” de todos los poros en I con respecto a E). Ahora, introducimos la **función de poro maximal** como $\rho_E(I) := \sup \Lambda(I)$. En el caso en que $\Lambda(I) = \emptyset$, simplemente tomamos $\rho_E(I) = 0$.

La función de poro maximal ρ_E (o simplemente ρ , cuando el conjunto E se entienda por contexto) aquí presentada no es más que un caso particular de la función homónima introducida en la Definición 4.1, excepto por la salvedad que su dominio incluye intervalos que no necesariamente son bolas del espacio $(\mathbb{R}, |x - y|, m)$. Además, es posible comprobar que, en este espacio, el supremo en la Definición 6.8 puede intercambiarse por un máximo. Esto es, siempre es posible hallar un poro en I cuya longitud sea máxima en comparación con el resto de los poros.

Proposición 6.9. Sean E y I como arriba, entonces $\rho(I) = \max \Lambda_E(I)$.

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la prueba de la Proposición 1.4. ■

Recordemos que un conjunto débilmente poroso en la recta real se define de la siguiente forma²⁶.

Definición 6.10. Diremos que un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}$ es (σ, γ) -**débilmente poroso** (o (σ, γ) -d.p. para abreviar) si existen constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ tales que para cada intervalo abierto I podemos encontrar una colección de intervalos abiertos y disjuntos de a pares $I_1, \dots, I_N$ (donde $N = N(I)$) que satisfacen

$$6.10.1. \quad I_i \subseteq I \setminus E \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$6.10.2. \quad |I_i| \geq 2\gamma\rho(I);$$

$$6.10.3. \quad \sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I|.$$

La colección formada por todos aquellos conjuntos E que cumplen la Definición 6.10 coincide con la clase $\text{DP}(\mathbb{R}, |x - y|, m)$ definida en el Capítulo 4 (después de todo, lo único que las diferencia es la definición exacta de la función de poro maximal ρ en ambos casos, pero que fácilmente puede verse resultan equivalentes). El hecho que $\text{DP}(\mathbb{R}, |x - y|, m)$ no es cerrada con respecto a la inclusión de conjuntos fue discutido en el Capítulo 4 cuando se mencionó que, si bien $\mathbb{Z}$

²⁵Con esto nos referimos a que I puede o no contener a sus extremos.

²⁶Naturalmente, esta definición no es más que una reformulación de la Definición 1.5.

pertenece a esta familia, el subconjunto N_0 no lo hace. Ésto fue comprobado en [And+24], donde el argumento esgrimido consistió en probar que la función de poro maximal asociada a N_0 no satisface la propiedad de duplicación, que es una implicación directa de la definición de porosidad débil en el caso euclídeo. La siguiente es una explicación cualitativa de por qué es sensato que N_0 no sea débilmente poroso basada en el gráfico de la función $\text{dist}(\cdot, N_0)^{-1}$ en entornos del origen.

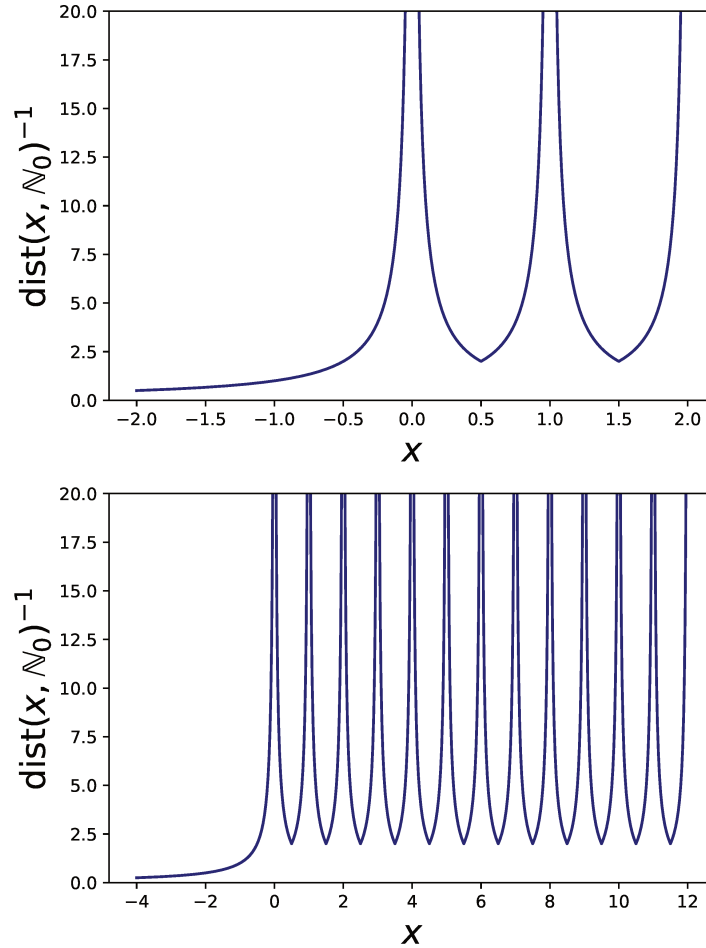


Figura 6.1: Gráficos de la función $x \mapsto \text{dist}(x, N_0)^{-1}$ en los intervalos $I_n := (-\sqrt{n}, n - \sqrt{n})$, para $n = 2$ y $n = 4$. La elección de graficar sobre estos intervalos no es arbitraria: considerando la sucesión $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es posible verificar que $\rho(I_n) = \sqrt{n}$, sin embargo esta cantidad se vuelve despreciable frente a la medida total $|I_n| = n$ y, a medida que n aumenta, no existen otros poros de tamaño comparable al de $\rho(I_n)$. Este argumento puede utilizarse como demostración alternativa que N_0 no es débilmente poroso en el sentido estándar.

Como se aprecia en la figura anterior, la inversa de la distancia a N_0 presenta, en promedio, valores relativamente bajos en el extremo inferior de I_n y valores altos en el extremo opuesto. Esto sugiere que el valor medio $\int_{I_n} \text{dist}(x, N_0)^{-\alpha} dx$ difícilmente pueda estar mayorado por la cantidad $\inf_{x \in I_n} \text{dist}(x, N_0)^{-\alpha}$ para cierto $0 < \alpha < 1$, dado que la densidad de puntos del conjunto N_0 a derecha de I_n hace que la integral crezca conforme aumenta n mientras que el decaimiento de la función a izquierda implica que su ínfimo sobre I_n tiende a cero con n . Luego, es natural que no exista constante positiva α tal que $\text{dist}(\cdot, N_0)^{-\alpha} \in A_1(\mathbb{R})$ o, equivalentemente, que N_0 no sea débilmente poroso. Ahora bien, aún sobre los intervalos problemáticos I_n , el comportamiento de

la función considerada sí parece adecuarse a la desigualdad (6.2), siendo que los inconvenientes previos se solucionarían gracias a la lateralidad de la nueva condición. Por este motivo, $\mathbb{N}_0$ sería un candidato a pertenecer a la clase de conjuntos que es solución al Problema 6.5, al igual que $\mathbb{Z}$ que pertenece al conjunto solución del más restrictivo Problema 1.1. ¿Pero qué clase de cambios deberían aplicarse a la Definición 6.10 con el fin que tanto $\mathbb{N}_0$ como $\mathbb{Z}$ satisfagan la nueva versión? La respuesta viene dada por la siguiente propuesta.

Definición 6.11. Diremos que un conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}$ es (σ, γ) -**débilmente poroso por derecha** (o $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p. para abreviar) si existen constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ tales que para cada intervalo abierto I podemos encontrar una colección de intervalos abiertos disjuntos de a pares $I_1, \dots, I_N$ (donde $N = N(I)$) que cumplen

$$6.11.1. \quad I_i \subseteq I^- \setminus E \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$6.11.2. \quad |I_i| \geq 2\gamma\rho(I^+);$$

$$6.11.3. \quad \sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I^-|.$$

Notemos que la condición 6.11.3 podría, en principio, reemplazarse por cualquiera de las desigualdades

$$\sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I^+| \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^N |I_i| \geq \frac{1}{2}\sigma|I|,$$

por lo que los cambios más trascendentes en la Definición 6.11 con respecto a la Definición 6.10 corresponden a las primeras dos condiciones. En particular, un conjunto débilmente poroso por derecha deberá admitir una cantidad finita de poros disjuntos de a pares en la *mitad izquierda* de cualquier intervalo considerado, donde cada poro sea de tamaño comparable a la función de poro maximal aplicada sobre la *mitad derecha* del intervalo y que en conjunto sumen una longitud comparable a la de éste.

En analogía con lo anterior, diremos que un subconjunto de la recta real es (σ, γ) -**débilmente poroso por izquierda** (denotado como $(\sigma, \gamma, -)$ -d.p.) si satisface la Definición 6.11 reemplazando 6.11.1-6.11.3 por

$$6.11.1' \quad I_i \subseteq I^+ \setminus E \text{ para todo } i = 1, \dots, N;$$

$$6.11.2' \quad |I_i| \geq 2\gamma\rho(I^-);$$

$$6.11.3' \quad \sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I^+|.$$

De aquí en más, denotaremos por $\text{DP}^\pm(\mathbb{R})$ a la clase de conjuntos débilmente porosos por izquierda o derecha, según corresponda. Antes de demostrar que, como es de esperarse, $\mathbb{N}_0 \in \text{DP}^+(\mathbb{R})$ o que valen las inclusiones $\text{DP}(\mathbb{R}) \subseteq \text{DP}^\pm(\mathbb{R})$, procederemos a probar algunas propiedades elementales de las nuevas clases introducidas.

Proposición 6.12. Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que

$$6.12.1. \quad E \in \text{DP}^+(\mathbb{R}) \text{ si y solo si } \bar{E} \in \text{DP}^+(\mathbb{R}).$$

$$6.12.2. \quad \text{DP}^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbb{R}, m) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : m(A) = 0\}, \text{ donde } m \text{ es la medida de Lebesgue.}$$

Demostración. 6.12.1 se sigue del hecho que un dado intervalo abierto J satisface $J \cap E = \emptyset$ si y solo si $J \cap \bar{E} = \emptyset$. Por 6.12.1 y debido a la completitud de la medida de Lebesgue, para probar 6.12.2 podemos asumir que E es un conjunto cerrado. Sea I un intervalo abierto arbitrario y

definamos J como el intervalo abierto que cumple $J^- = I$. Usando la condición de porosidad débil por derecha de E aplicada a J , podemos encontrar una sucesión de intervalos disjuntos de a pares $I_1, \dots, I_N$ contenidos en $I \setminus E$ tales que $\sigma|I| \leq \sum_{i=1}^N |I_i| \leq |I \setminus E|$. Dado que E es Lebesgue medible, se tiene que $|I| = |I \cap E| + |I \setminus E|$, por lo que a partir de las desigualdades anteriores podemos escribir

$$|I \cap E| \leq \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)|I \setminus E| = \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)(|I| - |I \cap E|).$$

Definiendo $\lambda := \sigma^{-1} - 1$ y despejando $|I \cap E|$, obtenemos la desigualdad $|I \cap E| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}|I|$. Esta desigualdad se cumple para todo intervalo abierto I , de modo que, suponiendo sin pérdida de generalidad que $|E| < \infty$, podemos estimar su medida de Lebesgue de la siguiente manera. Sea $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ una colección de intervalos abiertos tal que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$. Entonces

$$|E| = \left|E \cap \bigcup_{j=1}^\infty I_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^\infty (E \cap I_j)\right| \leq \sum_{j=1}^\infty |E \cap I_j| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1} \sum_{j=1}^\infty |I_j|,$$

lo que implica $|E| \leq \frac{\lambda}{\lambda+1}|E|$ al tomar el ínfimo sobre todas esas sucesiones $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ y, dado que $\frac{\lambda}{\lambda+1} < 1$, concluimos que $|E| = 0$. ■

Debido a la [Proposición 6.12](#), los conjuntos porosos laterales tienen medida de Lebesgue nula y son nunca densos. Luego, no tendría sentido afirmar que estos conjuntos poseen “más poros” en una dirección preferencial; lo cierto es que su lateralidad se manifiesta en otros aspectos que serán elucidados en breve. Por lo pronto, exploraremos algunas propiedades adicionales de estos conjuntos, incluyendo su relación con los conjuntos débilmente porosos usuales. El próximo es un lema técnico que establece la duplicación de la función ρ_E para $E \in \text{DP}(\mathbb{R}, |x - y|, m)$.

Lema 6.13. *Sea E un conjunto (σ, γ) -d.p. Si $J \subseteq I$ son dos intervalos abiertos que satisfacen $|I| = 2|J|$, entonces existe una constante $\Phi = \Phi(\sigma, \gamma) > 1$, independiente de I y de J , tal que*

$$\rho(I) \leq \Phi \rho(J).$$

Demostración. Se sigue de la duplicación del poro maximal diádico (1.3) y de la relación entre éste y la función ρ en base a lo discutido en la primera observación que sucede a la [Definición 4.10](#). ■

Teorema 6.14. *Dado $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

6.14.1. *Existen constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ tales que E es (σ, γ) -d.p.*

6.14.2. *Existen constantes $\sigma_0, \gamma_0 \in (0, 1)$ tales que E es $(\sigma_0, \gamma_0, -)$ -d.p. y $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p. simultáneamente.*

Demostración. Supongamos primero que E es (σ, γ) -d.p. para ciertos parámetros $0 < \sigma, \gamma < 1$. Notemos que, para demostrar 6.14.1 $\implies$ 6.14.2, basta verificar la condición de porosidad débil por derecha sobre E . A este fin, tomemos un intervalo abierto I y usemos la hipótesis aplicada a I^- para encontrar intervalos disjuntos de a pares $I_1, \dots, I_N$ tales que $I_i \subseteq I^- \setminus E$, $|I_i| \geq 2\gamma\rho(I^-)$ y $\sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma|I^-|$. Esto ya da cuenta de las propiedades 6.11.1 y 6.11.3 de la [Definición 6.11](#) si definimos $\sigma_0 := \sigma$, mientras que la propiedad 6.11.2 con $\gamma_0 := \gamma\Phi^{-1}$ se sigue del [Lema 6.13](#), puesto que

$$|I_i| \geq 2\gamma\rho(I^-) \geq 2\gamma\Phi^{-1}\rho(I) \geq 2\gamma\Phi^{-1}\rho(I^+).$$

Por otro lado, si E es simultáneamente $(\sigma_0, \gamma_0, -)$ -d.p. y $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p., notemos que $\rho(I) \leq \rho(I^-) + \rho(I^+) \leq 2 \max\{\rho(I^-), \rho(I^+)\}$ para todo intervalo abierto I . Luego, fijo I , podemos suponer sin pérdida de la generalidad que $\rho(I^+) \geq \rho(I^-)$ y, por lo tanto, $\rho(I^+) \geq \frac{1}{2}\rho(I)$. La condición E es $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p. aplicada a I garantiza entonces la existencia de intervalos de a pares $I_1, \dots, I_N$ tales que $I_i \subseteq I^- \setminus E$, $|I_i| \geq 2\gamma_0\rho(I^+) \geq 2\gamma\rho(I)$ y $\sum_{i=1}^N |I_i| \geq \sigma_0|I^-| = \sigma|I|$, siempre que elijamos $\gamma := \frac{1}{2}\gamma_0$ y $\sigma := \frac{1}{2}\sigma_0$. ■

De lo anterior se deduce que todo conjunto débilmente poroso es automáticamente débilmente poroso lateral en ambas direcciones. Que $\mathbb{N}_0$ es débilmente poroso por derecha se sigue como consecuencia de la siguiente proposición (basta con tomar $E = \mathbb{Z}$ y $x_0 = 0$ en 6.15.1).

Proposición 6.15. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y sea $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la reflexión respecto del origen, es decir, $R(x) = -x$. Entonces:*

6.15.1. *Si E es (σ, γ) -d.p., entonces $E \cap [x_0, \infty)$ es $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p. para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*

6.15.2. *Si E es $(\sigma, \gamma, \pm)$ -d.p., entonces $R(E)$ es $(\sigma, \gamma, \mp)$ -d.p.*

Demostración. Para probar 6.15.1, consideremos el conjunto $E_+ := E \cap [x_0, \infty)$ y tomemos un intervalo abierto I . Si $I \subseteq (-\infty, x_0)$, es claro que E_+ satisface la condición de porosidad débil lateral por derecha en I para cualquier par de números $\sigma, \gamma \in (0, 1)$. Si, en cambio, $I \subseteq (x_0, \infty)$, entonces E_+ satisface la condición de porosidad débil en I con parámetros σ y γ , y por lo tanto también satisface la condición de porosidad débil lateral por derecha en I con parámetros $\sigma_0 := \sigma$ y $\gamma_0 := \gamma\Phi^{-1}$ idénticos a los de la demostración del Teorema 6.14.

Finalmente, consideremos el caso en que $x_0 \in I$ y denotemos por z al centro de dicho intervalo. Si $z \leq x_0$, entonces $I^- \cap E_+ = \emptyset$ y, dado que $|I^-| \geq 2\gamma_0\rho(I^+)$, la colección $\{I^-\}$ satisface las propiedades 6.11.1-6.11.3, reemplazando E por E_+ . Si $z > x_0$, recordando que E es $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p. por el Teorema 6.14, podemos encontrar una colección de intervalos abiertos $I_1, \dots, I_N$, disjuntos de a pares, que satisfacen las propiedades 6.11.1-6.11.3; pero como $E_+ \subseteq E$, dicha colección también satisface la definición mencionada reemplazando E por E_+ .

La demostración de 6.15.2 resulta inmediata al notar que

$$\rho_{R(E)}(I^+) = \rho_E(R(I)^-)$$

y que un intervalo abierto J satisface $J \subseteq I^-$ si y solo si $R(J) \subseteq R(I)^+$. ■

Siendo que toda intersección entre un conjunto débilmente poroso y una semirrecta en $\mathbb{R}$ da lugar a un débilmente poroso lateral, es natural preguntarse si quizás todos los elementos de $\text{DP}^\pm(\mathbb{R}, |x - y|, m)$ pueden obtenerse de esta forma. La respuesta es negativa y el siguiente conjunto es un contraejemplo.

Ejemplo 6.16. Sea $E = \{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ donde

$$z_k := \begin{cases} -2^{-k}, & k < 0 \\ k, & k \geq 0. \end{cases}$$

Veamos que E es débilmente poroso por derecha. A este fin, introducimos el conjunto $\mathcal{A}_E(\sigma, \gamma)$ como aquel formado por todos los intervalos abiertos I tales que E cumple con la Definición 6.11 en I con constantes $0 < \sigma, \gamma < 1$. Para probar que E es $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p., basta por lo tanto comprobar que, dado un intervalo abierto I , se cumple $I \in \mathcal{A}_E(\hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ para ciertos $\hat{\sigma} \geq \sigma$,

$\hat{\gamma} \geq \gamma$. Consideramos cuatro casos de forma separada.

- ◇ **Caso I** ($I \subseteq [0, \infty)$): notemos que $E \cap [0, \infty) = \mathbb{N}_0$, siendo que ya sabemos que $\mathbb{N}_0$ es $(\sigma_0, \gamma_0, +)$ -d.p. para ciertas constantes $0 < \sigma_0, \gamma_0 < 1$. Luego, $I \in \mathcal{A}_E(\sigma_0, \gamma_0)$ en este caso.
- ◇ **Caso II** ($I \subseteq (-\infty, 0)$): es suficiente considerar los subcasos para los cuales $\#(I \cap E) \geq 2$. Sean $e_k < e_{k-1} < \dots < e_0$ los puntos contenidos en dicha intersección, donde $k \geq 1$. Escribiendo $I = (a, b)$ y $c = \frac{a+b}{2}$, vemos que $c \leq \frac{1}{2}(e_k + 0) = e_{k-1}$. De esto se deduce que o bien $I^- \cap E = \emptyset$ o $I^- \cap E = \{e_k\}$. Si $I^- \cap E = \emptyset$, entonces $I \in \mathcal{A}_E(\hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ para cualquier elección de $0 < \hat{\sigma}, \hat{\gamma} < 1$. Si en cambio $I^- \cap E = \{e_k\}$, entonces $I^- \setminus E = (a, e_k) \cup (e_k, c)$ y al menos uno de estos intervalos debe tener una longitud mayor o igual a $\frac{1}{2}|I^-| \geq \rho(I^+)$, por lo que basta con elegir como colección de poros o subintervalos a este único intervalo para verificar que $I \in \mathcal{A}_E(\hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ con $\hat{\sigma} \leq \frac{1}{2}$ y $\hat{\gamma} \in (0, 1)$.
- ◇ **Caso III** ($0 \in I \wedge c \geq 0$): en esta situación tenemos que $I^+ \cap E \subseteq \mathbb{N}_0$, por lo que sabemos que podemos hallar una colección de subconjuntos abiertos y disjuntos de pares $\{I_j\}_{j=1}^N$ contenidos en $I^- \setminus \mathbb{N}_0$ que cumplen 6.11.1, 6.11.2 y 6.11.3 para el conjunto $\mathbb{N}_0$. Pero dado que $E \subseteq \mathbb{N}_0$, esta colección satisface las mismas propiedades para el conjunto E . Luego, $I \in \mathcal{A}_E(\sigma_0, \gamma_0)$, al igual que en el primer caso.
- ◇ **Caso IV** ($0 \in I \wedge c < 0$): es suficiente considerar los subcasos donde $\#(I^- \cap E) \geq 2$. Sean $e_k < e_{k-1} < \dots < e_1$ los puntos en esta intersección y tomemos $e_0 := \min(I^+ \cap E)$. Observemos que o bien e_0 pertenece al conjunto $E \cap (-\infty, 0)$ o $e_0 = 0$. Si $e_0 = 0$, se sigue que $\rho(I^+) \leq 2 = |e_1|$. Por otro lado, si $e_0 \in E \cap (-\infty, 0)$, entonces $\rho(I^+) \leq |e_0 - e_1| = |e_0|$. Ahora bien, consideremos la colección de intervalos abiertos $\{(e_{i+1}, e_i)\}_{i=1}^{k-1}$. Esta colección satisface las propiedades 6.11.1 y 6.11.2 de la Definición 6.11 para todo $\gamma \in (0, 1)$, dado que $|e_i - e_{i+1}| = |e_i| \geq |e_0| \geq \gamma \rho(I^+)$. Más aún, $|I^-| = \frac{1}{2}(b - a) \leq \frac{1}{2}(0 - 2e_k) = |e_k|$ y, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{k-1} |(e_{i+1}, e_i)| \geq |e_{k-1}, e_k| = \frac{1}{2}|e_k| \geq \frac{1}{2}|I^-|.$$

Luego, $I \in \mathcal{A}_E(\hat{\sigma}, \hat{\gamma})$ con $\hat{\sigma} \leq \frac{1}{2}$ y $\hat{\gamma} \in (0, 1)$.

La propiedad de duplicación de la función de poro maximal es una implicación inmediata de la porosidad débil en el caso euclídeo, como se vio en el Lema 6.13, que es consecuencia de la desigualdad (1.3) introducida en el Capítulo 1. Los siguientes resultados muestran que la porosidad lateral de un conjunto también implica una noción de duplicación de su función de poro maximal asociada, aunque con un cierto “sesgo lateral”.

Lema 6.17. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p. y sea I un intervalo abierto cualquiera. Entonces,

$$\rho(I) \leq \frac{\gamma + 1}{\gamma} \rho(I^-). \quad (6.7)$$

Demostración. Sea (c, d) un intervalo que no interseca con el conjunto E y contenido en I tal que $d - c = 2\rho(I)$; cuya existencia está garantizada por la definición de $\rho(I)$. Si $(c, d) \subseteq I^-$,

entonces $\rho(I^-) = \rho(I)$; mientras que si $(c, d) \subseteq I^+$, se tiene que

$$\rho(I^-) \geq \gamma \rho(I^+) = \frac{1}{2} \gamma (d - c) = \gamma \rho(I).$$

Por lo tanto, (6.7) se verifica en ambos casos.

Denotemos por z_I al centro de I y consideremos ahora el caso en que $c < z_I < d$. Observemos que $(c, z_I) \subseteq I^-$ y $(z_I, d) \subseteq I^+$. Por lo tanto,

$$\rho(I^-) \geq \frac{1}{2} (z_I - c) \quad (6.8)$$

y

$$\rho(I^-) \geq \gamma \rho(I^+) \geq \frac{1}{2} \gamma (d - z_I). \quad (6.9)$$

Combinando (6.8) y (6.9) obtenemos que $\rho(I^-) \geq f(z_I)$, donde

$$f(z) := \max \left\{ \frac{z-c}{d-c}, \gamma \frac{d-z}{d-c} \right\} \rho(I).$$

Dado que el primer argumento en el máximo que define a f es una función creciente de z y el segundo es decreciente, el mínimo de f para $z \in (c, d)$ se alcanza cuando ambos términos coinciden, es decir, cuando

$$\frac{z_{\min} - c}{d - c} = \gamma \frac{d - z_{\min}}{d - c} \iff z_{\min} = \frac{\gamma d + c}{1 + \gamma}.$$

De aquí se concluye finalmente que

$$\rho(I^-) \geq f(z_{\min}) = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \rho(I).$$

■

Corolario 6.18. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p. y sea I un intervalo abierto con centro z_I . Si J es otro intervalo abierto contenido en I cuyo centro z_J satisface $z_J \leq z_I$, entonces existen constantes $\theta_1, \theta_2 > 0$ dependientes de γ tales que

$$\rho(I^+) \leq \theta_1 \left(\frac{|I|}{|J|} \right)^{\theta_2} \rho(J^+). \quad (6.10)$$

Demostración. Sea m el menor entero positivo tal que $2^{m-1}|J| \geq |I|$ (o, equivalentemente, $m - 1 < 1 + \log_2 \left(\frac{|I|}{|J|} \right) \leq m$). Para cada $0 \leq n \leq m$, sea J_n el intervalo abierto con centro z_J y longitud $|J_n| = 2^n |J|$. En particular, $J_0 = J$, $I \subseteq J_m$ y, dado que $z_J \leq z_I$, se tiene $I^+ \subseteq J_m^+$. Es claro que esta última inclusión implica $\rho(I^+) \leq \rho(J_m^+)$. Además, como $\rho(J_n^+) = \rho(J_{n+1}^+)$, podemos aplicar reiteradamente el Lema 6.17 para obtener

$$\rho(J_m^+) \leq \frac{\gamma + 1}{\gamma} \rho(J_{m-1}^+) \leq \dots \leq \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^m \rho(J_0^+) = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^m \rho(J^+).$$

Por lo tanto, dado que $\frac{\gamma + 1}{\gamma} > 1$ y $m < 2 + \log_2 \left(\frac{|I|}{|J|} \right)$, podemos estimar

$$\begin{aligned} \rho(I^+) &\leq \rho(J_m^+) \leq \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^m \rho(J^+) \leq \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^{2 + \log_2 \left(\frac{|I|}{|J|} \right)} \rho(J^+) \\ &= \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^2 \left(\frac{|I|}{|J|} \right)^{\log_2 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)} \rho(J^+). \end{aligned}$$

En consecuencia, basta con tomar $\theta_1 := \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^2$ y $\theta_2 := \log_2 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)$. ■

Observación: dado un intervalo abierto K , notemos que el Corolario 6.18 generaliza al Lema 6.17 aplicado sobre K si se toman intervalos abiertos I tal que $(I^+)^{\circ} = K$ y J tal que $(J^+)^{\circ} = K^-$.

La hipótesis $z_J \leq z_I$ en el Corolario 6.18 es esencial ya que la desigualdad (6.10) no se cumple en general sin esta restricción. En efecto, sabemos que $\mathbb{N}_0$ es débilmente poroso por derecha, pero si tomamos $I_n = (-2n(1+t), 2n(1-t))$ para algún $0 < t < \frac{1}{2}$ fijo, y $J_n = (-n, n)$, entonces aplicando (6.8) sobre $I = I_n$ y $J = J_n$ obtenemos

$$\max\{1, 2nt\} = \rho(I_n^+) \leq \theta_1 2^{\theta_2},$$

lo cual es una contradicción, ya que $\rho(I_n^+)$ tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$ independientemente de la elección de t y a pesar que $J_n \subseteq I_n$ (pero siendo que $z_J > z_I$). De este modo, una región situada a la derecha de un poro relativamente grande con respecto al conjunto E no presenta necesariamente poros de tamaño similar. Esto debe compararse con lo que sucede en el caso de los pesos $w \in A_1^+(\mathbb{R})$ en el siguiente sentido: el valor medio de w en una región situada a la izquierda de un intervalo I tal que $\inf_I w$ es relativamente pequeño debe ser asimismo suficientemente pequeño para que se cumpla (6.6), mientras que esto no tiene por qué cumplirse para el valor medio en regiones situadas a la derecha de este mismo intervalo I . Incluso, la función w podría tomar el valor infinito a partir del extremo superior de I en adelante. Esta propiedad de duplicación sesgada de la función ρ asociada a un conjunto poroso lateral es la primera manifestación evidente de la lateralidad tácita en la Definición 6.11.

6.3 Relación entre porosidad y pesos laterales

En esta sección nos dedicaremos a demostrar que las clases $DP^{\pm}(\mathbb{R}, |x-y|, m)$ coinciden con las familias de conjuntos que son soluciones al Problema 6.5. El procedimiento para llegar a este resultado es completamente análogo al utilizado para arivar al Teorema 1.2 en el Capítulo 1. Comenzamos por demostrar dos lemas de carácter técnico. El primero de ellos da cuenta de la relación que existe entre el ínfimo esencial de la inversa de la función distancia a un conjunto y su función de poro maximal.

Proposición 6.19. *Sea E un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue cero. Entonces, para todo intervalo abierto I , se tiene que*

$$\text{dist}(x, E) \leq 2 \left(1 + \frac{\text{dist}(I, E)}{|I|} \right) \rho(I), \text{ para todo } x \in I. \quad (6.11)$$

Demostración. Fijemos un intervalo abierto I y supongamos en primer lugar que $I \cap E = \emptyset$. En este caso, dados puntos $x, y \in I$ y $e \in E$, la desigualdad triangular implica que

$$|x - e| \leq |x - y| + |y - e| \leq |I| + |y - e|,$$

por lo que se sigue que

$$\text{dist}(x, E) \leq |I| + d(I, E) = \left(1 + \frac{\text{dist}(I, E)}{|I|} \right) |I|$$

para todo $x \in I$. Como $\rho(I) = \frac{1}{2}|I|$, obtenemos

$$\text{dist}(x, E) \leq 2 \left(1 + \frac{d(I, E)}{|I|} \right) \rho(I),$$

para todo $x \in I$. Ahora bien, si $I \cap E \neq \emptyset$, tomemos $x \in I \setminus E$. Dado que E es cerrado, el punto x debe pertenecer a una componente conexa de $I \setminus E$ de la forma (a, b) . Tenemos que $(a, b) \neq I$ ya que $I \cap E \neq \emptyset$, de modo que o bien $a \in E$ o bien $b \in E$. En cualquier caso, se cumple

$$\text{dist}(x, E) \leq b - a \leq 2\rho(I),$$

y por lo tanto se verifica (6.11). ■

Lema 6.20. *Sea E un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue cero y fijemos $\eta > 0$. Entonces, existe una constante $C_0 = C_0(\eta) > 0$ tal que para todo intervalo abierto I para el cual $\text{dist}(I, E) \leq \eta|I|$, se cumple que*

$$\rho(I^+) \geq C_0 \text{dist}(x, E), \text{ para todo } x \in I^+. \quad (6.12)$$

En particular, como $|E| = 0$, $\rho(I^+)^{-\alpha} \leq C(\alpha, \eta) \text{ess inf}_{x \in I^+} d(x, E)^{-\alpha}$ para todo $\alpha > 0$.

Demostración. Observemos primero que obtener (6.12) es equivalente a demostrar que $\rho((I^+)^{\circ}) \geq C_0 d(x, E)$ para todo $x \in (I^+)^{\circ}$. Pero aplicando la [Proposición 6.19](#) al intervalo abierto $(I^+)^{\circ}$, obtenemos

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leq 2 \left(1 + \frac{d((I^+)^{\circ}, E)}{|(I^+)^{\circ}|} \right) \rho((I^+)^{\circ}) \\ &\leq (6 + 4\eta) \rho((I^+)^{\circ}), \end{aligned}$$

para todo $x \in (I^+)^{\circ}$, tal y como queríamos. ■

Lema 6.21. *Sea E un conjunto cerrado $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p. y sea $I = (a, b)$. Además, supongamos que $I^- \cap E \neq \emptyset$ y que $(c, d) \subseteq I^+ \setminus E$ satisface $d - c = 2\rho(I^+)$. Denotemos por $\tilde{I} = (a, \frac{c+d}{2})$. Entonces, existen constantes $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$ tales que*

$$|F(\beta_1 \varepsilon)| \leq \beta_2 |F(\varepsilon)| \quad (6.13)$$

uniformemente para todo $0 < \varepsilon < \rho(I^+)$, donde $F(\varepsilon) := E(\varepsilon) \cap \tilde{I}$ y $E(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, E) < \varepsilon\}$.

Demostración. Comenzamos fijando $\varepsilon \in (0, \rho(I^+))$ y escribiendo

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{i \in \Gamma} (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i),$$

donde $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$ son las, a lo sumo numerables, componentes conexas de $E(\varepsilon)$. Observemos que, para todo $i \in \Gamma$, existe $e_i \in E$ tal que $\tilde{a}_i < e_i < \tilde{b}_i$ y por lo tanto $\tilde{b}_i - \tilde{a}_i \geq 2\varepsilon$. Ahora bien, se sigue que

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^K (a_j, b_j),$$

donde cada $(a_j, b_j) = (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \cap \tilde{I}$ para algún $i \in \Gamma$, y siendo que los índices $j = 1, \dots, K$ han sido ordenados de forma tal que $a_1 < a_2 < \dots < a_K$. Además, dado que $\varepsilon < \rho(I^+)$, existe un entorno U de $\sup \tilde{I} = \frac{c+d}{2}$ que no interseca con $E(\varepsilon)$, de donde se sigue que $b_K < \sup \tilde{I}$ y que $d(b_j, E) \geq \varepsilon$ para todo $1 \leq j \leq K$. Se deduce entonces que los intervalos (a_j, b_j) son disjuntos de par en par y que $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$, salvo quizás para $j = 1$.

Tomemos ahora $\varepsilon' := \frac{\gamma}{4}\varepsilon$. Tenemos que

$$|F(\varepsilon) \setminus F(\varepsilon')| = \sum_{j=1}^K |(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')|.$$

Si $b_1 - a_1 < 2\varepsilon$, entonces $a_1 = a$ y, dado que $\text{dist}(b_1, E) \geq \varepsilon$, se sigue que el intervalo

$$(b_1 + \varepsilon' - \varepsilon, b_1) = (b_1 + \varepsilon(\frac{\gamma}{4} - 1), b_1)$$

no interseca a $E(\varepsilon')$. Notemos que, en el caso en que $b_1 + \varepsilon(\frac{\gamma}{4} - 1) \leq a$, se cumple

$$|(a_1, b_1) \setminus E(\varepsilon')| = |(a_1, b_1)|.$$

Por otro lado, si $b_1 + \varepsilon(\frac{\gamma}{4} - 1) > a$, podemos estimar

$$|(a_1, b_1) \setminus E(\varepsilon')| \geq |(b_1 + \varepsilon(\frac{\gamma}{4} - 1), b_1)| = \varepsilon \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \geq \frac{3}{8}(b_1 - a_1).$$

Estimemos ahora $|(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')|$ para $1 \leq j \leq K$ en el caso general en que $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$ (ver Figura 6.2). Sea I_j el intervalo abierto tal que $I_j^- = (a_j, b_j)$. Recordando nuevamente que $\text{dist}(b_j, E) \geq \varepsilon$, se tiene $(b_j, b_j + \varepsilon) \subseteq I_j^+$ y $(b_j, b_j + \varepsilon) \cap E = \emptyset$. Esto implica que $\rho(I_j^+) \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ y, dado que E es $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p., existe una colección de intervalos abiertos y disjuntos de par en par $\{J_i^j\}_{i=1}^N$, cada uno contenido en $I_j^- \setminus E$, tal que

$$|J_i^j| \geq 2\gamma\rho(I_j^+) \geq \gamma\varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N |J_i^j| \geq \sigma|I_j^-|.$$

Observemos que $|J_i^j \setminus E(\varepsilon')| \geq \frac{1}{2}|J_i^j|$. En consecuencia,

$$|(a_j, b_j) \setminus E(\varepsilon')| \geq \sum_{i=1}^N |J_i^j \setminus E(\varepsilon')| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |J_i^j| \geq \frac{\sigma}{2}|I_j^-| = \frac{\sigma}{2}(b_j - a_j).$$

Combinando las estimaciones obtenidas hasta el momento, obtenemos

$$|F(\varepsilon) \setminus F(\varepsilon')| \geq \min\left\{\frac{3}{8}, \frac{\sigma}{2}\right\} \sum_{j=1}^K |(a_j, b_j)| =: (1 - \beta_2)|F(\varepsilon)|.$$

Luego, el enunciado se sigue tomando $\beta_1 := \frac{\gamma}{4}$ ■

La desigualdad (6.12) da cuenta de un decaimiento del tipo ley de potencias para la medida de los entornos de E en función del poro maximal a derecha y resulta análoga a la desigualdad 4.17.1 obtenida para conjuntos débilmente porosos en el sentido usual. Una vez más, la dependencia para con la función ρ evaluada sobre la mitad derecha del intervalo considerado es una manifestación de la lateralidad propia de los conjuntos introducidos en la Definición 6.11. Llegado a este punto, contamos con todas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 6.22. *Siendo E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

6.22.1. *existe algún $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R}) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R})$;*

6.22.2. *E es un conjunto débilmente poroso por derecha.*

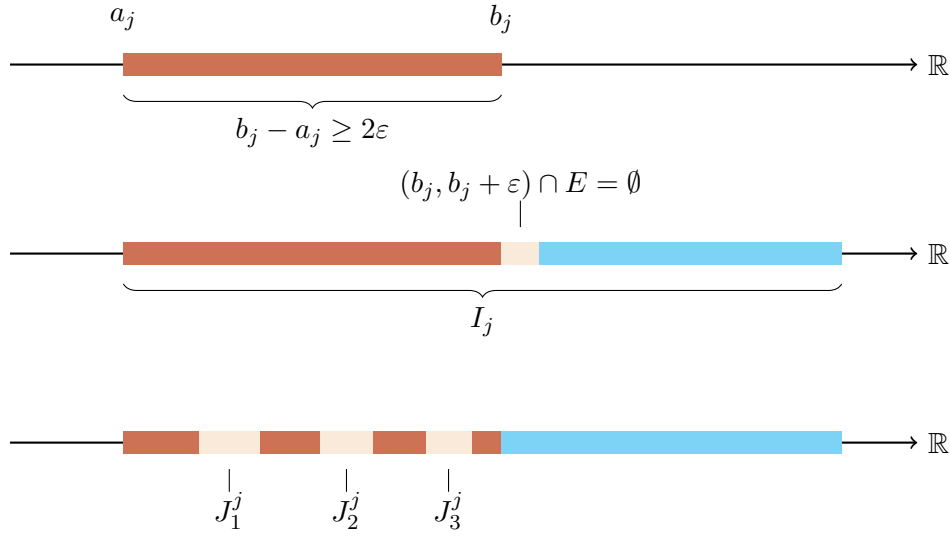


Figura 6.2: La estrategia adoptada se basa en la esquematizada en la Figura 1.3. En el caso que $b_j - a_j \geq 2\varepsilon$, el intervalo $(b_j, b_j + \varepsilon)$ no interseca con E . Luego, $\rho(I_j) \geq \varepsilon$, donde I_j es el intervalo tal que $I_j^- = (a_j, b_j)$. Utilizando la hipótesis de porosidad débil lateral de E sobre I_j , es posible entonces cubrir una fracción σ de (a_j, b_j) con poros de tamaño comparable a ε , que permiten obtener la estimación $|(a_j, b_j) \setminus F(\varepsilon')| \gtrsim |(a_j, b_j)|$.

Demostración.

(6.22.1 $\implies$ 6.22.2) Por la Proposición 6.12 y el hecho que $\text{dist}(\cdot, E) = \text{dist}(\cdot, \overline{E})$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que E es un conjunto cerrado. Dado que $w(x) := \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y que $w|_E = \infty$, se sigue que $|E| = 0$. Sea $\gamma \in (0, 1)$ un número a elegir más adelante. Dado un intervalo abierto I , escribimos

$$I^- \setminus E = \bigcup_{j \in \Gamma} (a_j, b_j),$$

donde los intervalos (a_j, b_j) son disjuntos de par en par. Definimos ahora el conjunto

$$\Omega := \{y \in I^- \setminus E : y \in (a_j, b_j) \text{ con } b_j - a_j < 2\gamma\rho(I^+)\}.$$

Notemos que E satisface la condición de porosidad débil lateral por derecha en I con constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$ si y solo si $|(I^- \setminus E) \setminus \Omega| \geq \sigma|I^-|$, por lo que basta verificar esta cota para algún valor apropiado de σ .

Si $\Omega = \emptyset$, entonces $|(I^- \setminus E) \setminus \Omega| = |I^-|$ y la desigualdad requerida se cumple para cualquier elección de $\sigma \in (0, 1)$. Supongamos entonces que $\Omega \neq \emptyset$ y sean $x \in \Omega$ y $j \in \Gamma$ tal que (a_j, b_j) contiene a x . Observemos que $(a_j, b_j) \neq I^-$ puesto que

$$b_j - a_j < 2\gamma\rho(I^+) \leq \gamma|I^+| = \gamma|I^-|.$$

De aquí se deduce que o bien $a_j \in E$ o $b_j \in E$. En consecuencia,

$$\text{dist}(x, E) \leq b_j - a_j < 2\gamma\rho(I^+),$$

o, equivalentemente,

$$\rho(I^+)^{-\alpha} < (2\gamma)^\alpha \text{dist}(x, E)^{-\alpha},$$

para todo $x \in \Omega$. Partiendo de esta desigualdad e integrando sobre Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(I^+)^{-\alpha} \frac{|\Omega|}{|I^-|} &< \frac{(2\gamma)^\alpha}{|I^-|} \int_{\Omega} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq \frac{(2\gamma)^\alpha}{|I^-|} \int_{I^-} d(x, E)^{-\alpha} dx \\ &\leq (2\gamma)^\alpha [w]_{A_1^+(\mathbb{R})} \text{ess inf}_{x \in I^+} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \\ &\leq (2\gamma)^\alpha [w]_{A_1^+(\mathbb{R})} \text{dist}(z, E)^{-\alpha} \\ &= C(\alpha) \gamma^\alpha \rho(I^+)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

donde z denota al centro de algún intervalo $J \subseteq I^+ \setminus E$ con $|J| = 2\rho(I^+)$. Simplificando y recordando que $|E| = 0$, obtenemos

$$|\Omega| < C(\alpha) \gamma^\alpha |I^-| \iff (1 - C(\alpha) \gamma^\alpha) |I^-| < |(I^- \setminus E) \setminus \Omega|.$$

Por lo tanto, basta elegir $\gamma \in (0, 1)$ suficientemente pequeño de modo que $C(\alpha) \gamma^\alpha < 1$ y tomar $\sigma := 1 - C(\alpha) \gamma^\alpha$ para obtener la desigualdad buscada.

(6.22.2 $\implies$ 6.22.1) Supongamos ahora que E es un conjunto cerrado $(\sigma, \gamma, +)$ -d.p. y fijemos un intervalo abierto I . Debemos encontrar constantes $\alpha, C > 0$, ambas independientes de I , tales que

$$\int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq C \text{ess inf}_{x \in I^+} \text{dist}(x, E)^{-\alpha}.$$

Una vez verificada esta desigualdad, la integrabilidad local se sigue del hecho que

$$\text{ess inf}_{x \in I^+} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} \leq \text{dist}(z, E)^{-\alpha} = \rho(I^+)^{-\alpha} < \infty,$$

donde z es el centro de algún intervalo $J \subseteq I^+ \setminus E$ con $|J| = 2\rho(I^+)$. A continuación, dividimos el problema en tres casos según la naturaleza del intervalo I .

Caso I ($I^- \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(I, E) > 2|I|$): para todo $x \in I^-$ y $y \in I^+$, la desigualdad triangular implica que $\text{dist}(y, E) - |x - y| \leq \text{dist}(x, E)$. De aquí se sigue que

$$\text{dist}(x, E) \geq \text{dist}(y, E) - |x - y| \geq \text{dist}(y, E) - |I| \geq \text{dist}(y, E) - \frac{1}{2} \text{dist}(I^-, E) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(y, E).$$

Fijo $x \in I^-$, esto implica que $\text{dist}(x, E)^{-\alpha} \leq 2^\alpha \text{ess inf}_{y \in I^+} \text{dist}(y, E)^{-\alpha}$ para todo $\alpha > 0$, y por lo tanto

$$\int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq 2^\alpha \text{ess inf}_{y \in I^+} \text{dist}(y, E)^{-\alpha}.$$

Caso II ($I^- \cap E = \emptyset \wedge \text{dist}(I, E) \leq 2|I|$): escribamos $I^- = (a, b)$ y comencemos realizando las siguientes estimaciones usando $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned} \int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \text{dist}(x, \partial I^-)^{-\alpha} dx \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{-\alpha} dx \\ &= \frac{2}{b-a} \int_0^{\frac{b-a}{2}} u^{-\alpha} du = (1-\alpha) \left(\frac{b-a}{2} \right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Dado que $b-a = |I^-| = |I^+| \geq 2\rho(I^+)$, obtenemos

$$\int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq (1-\alpha) \left(\frac{b-a}{2} \right)^{-\alpha} \leq C(\alpha) \rho(I^+)^{-\alpha}. \quad (6.14)$$

La condición A_1^+ en este caso se deduce ahora del [Lema 6.20](#).

Caso III ($I^- \cap E \neq \emptyset$): al igual que en el caso anterior, basta verificar que $\int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \lesssim \rho(I^+)^{-\alpha}$, de donde la condición A_1^+ se sigue aplicando el [Lema 6.20](#). Para obtener esta cota, consideramos la familia de conjuntos $\{F(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ introducida en el [Lema 6.21](#) y tomamos $0 < \alpha < 1$ a elegir luego. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &\leq \frac{1}{|I^-|} \left(\int_{F(\frac{1}{2}\rho^+)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx + \int_{I^- \setminus F(\frac{1}{2}\rho^+)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{|I^-|} \int_{F(\frac{1}{2}\rho^+)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx + \left(\frac{\rho^+}{2} \right)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

donde $\rho^+ := \rho(I^+)$. Para la integral restante en la desigualdad anterior, podemos estimar

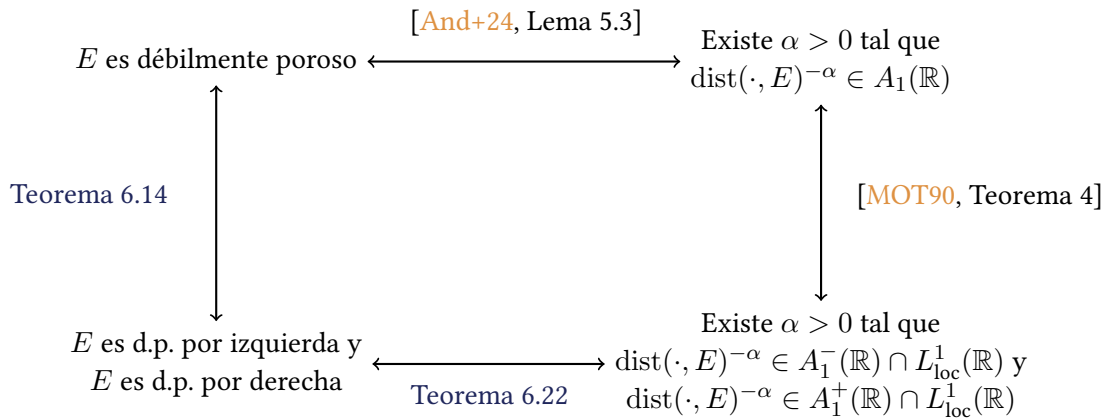
$$\begin{aligned} \int_{F(\frac{1}{2}\rho^+)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{F(\frac{1}{2}\beta_1^k \rho^+) \setminus F(\frac{1}{2}\beta_1^{k+1} \rho^+)} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \\ &\leq \left(\frac{\beta_1}{2} \rho^+ \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^{-\alpha k} |F(\frac{1}{2}\beta_1^k \rho^+)| \\ &\leq \left(\frac{\beta_1}{2} \rho^+ \right)^{-\alpha} |F(\frac{1}{2}\rho^+)| \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_1^{-\alpha} \beta_2)^k \\ &\leq C(\alpha) |I| \rho(I^+)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$ ha sido elegido suficientemente pequeño de modo que $\beta_1^{-\alpha} \beta_2 < 1$. Hemos probado así la existencia de constantes α y C tales que

$$\int_{I^-} \text{dist}(x, E)^{-\alpha} dx \leq C \rho(I^+)^{-\alpha}$$

en el último caso, lo que demuestra la condición A_1^+ del peso $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha}$ con $\alpha < \frac{\log \beta_2}{\log \beta_1}$. ■

Combinando el [Teorema 6.22](#) con resultados previos de la teoría de pesos laterales así como de conjuntos débilmente porosos, podemos establecer el siguiente diagrama.



Cada flecha en este diagrama representa una equivalencia entre las afirmaciones que conecta. Las equivalencias superior y derecha son corresponden a resultados de Anderson *et al.* y de la

teoría de pesos laterales, respectivamente; mientras que las restantes son fruto de los resultados desarrollados a lo largo de este capítulo y que permiten englobar las relaciones existentes entre pesos de Muckenhoupt convencionales, pesos laterales, porosidad débil y porosidad débil lateral. Cabe destacar que recientemente los pesos distancia laterales han sido estudiados en contextos parabólicos en el trabajo [LMV26], donde el caso de $A_1^\pm(\mathbb{R})$ aquí descrito es mencionado como antecedente.

En parte, la concordancia existente entre los resultados laterales y bilaterales se deben a que optamos por restringirnos al estudio de pesos distancia laterales localmente integrables. Sin embargo, esto deja abierto el interrogante ¿cuáles son los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que admiten pesos distancia laterales (no necesariamente integrables sobre cualquier intervalo)? Debido a la estructura de los pesos laterales dada por (6.5), podría conjeturarse que estos subconjuntos consisten uniones entre un conjunto débilmente poroso lateral y una semirrecta de la forma $(-\infty, a_w]$ o $[b_w, \infty)$. Una de las implicaciones de esta conjetura es relativamente sencilla de demostrar utilizando los resultados obtenidos hasta el momento.

Teorema 6.23. *Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto débilmente poroso por derecha y x^* un punto arbitrario en $\mathbb{R}$. Entonces, si*

$$E^* := E \cup [x^*, \infty),$$

existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $w := \text{dist}(\cdot, E^)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R})$. En particular, este peso no es localmente integrable.*

Demostración. Observemos en primer lugar que si $\{x \in E : x < x^*\} = \emptyset$, entonces

$$\text{dist}(x, E^*)^{-\alpha} = \begin{cases} |x^* - x|^{-\alpha}, & \text{si } x < x^*, \\ \infty, & \text{si } x \geq x^*. \end{cases}$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$. Luego, w es una función no negativa y monótona no decreciente. Por el Ejemplo 6.1, se sigue que $w \in A_1^+(\mathbb{R})$.

Supongamos ahora que $\{x \in E : x < x^*\} \neq \emptyset$ y definamos t como el supremo de este conjunto. Claramente, $t \leq x^*$. Dado que E es débilmente poroso por derecha, usando el Teorema 6.22 podemos hallar $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\text{dist}(\cdot, E)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R}) \cap L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Para este valor de α , tenemos que

$$\text{dist}(x, E^*)^{-\alpha} = \begin{cases} \text{dist}(x, E)^{-\alpha}, & \text{si } x \leq \frac{t+x^*}{2}, \\ |x^* - x|^{-\alpha}, & \text{si } \frac{t+x^*}{2} < x < x^*, \\ \infty, & \text{si } x \geq x^*. \end{cases}$$

Por lo tanto, $w(x) = g(x) \text{dist}(x, E)^{-\alpha}$, donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq \frac{t+x^*}{2}, \\ \left(\frac{\text{dist}(x, E)}{|x^* - x|} \right)^\alpha, & \text{si } \frac{t+x^*}{2} < x < x^*, \\ \infty, & \text{si } x \geq x^* \end{cases}$$

es una función no creciente. Esto es, w se escribe como un producto entre un peso de $A_1^+(\mathbb{R}) \cap L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) \subseteq A_1(\mathbb{R})$ y una función monótona. En consecuencia, $w \in A_1^+(\mathbb{R})$, nuevamente debido al Ejemplo 6.1. ■

La recíproca del teorema anterior no parece ser inmediata. La prueba de la implicación 6.22.1 $\implies$ 6.22.2 podría utilizarse para comprobar que, si $\text{dist}(\cdot, E^*)^{-\alpha} \in A_1^+(\mathbb{R})$, entonces E^* cumple con la Definición 6.11 en todos los intervalos $I \subseteq (-\infty, x^*)$. No obstante, esto no garantiza que el conjunto $E^* \setminus [x^*, \infty)$ pueda de alguna forma “completarse” a un conjunto débilmente poroso por derecha. Por este motivo, esta recíproca representa un problema abierto.

Como comentario final antes de finalizar el capítulo, notemos que el Lema 6.21 provee una cota para el contenido de Minkowski local de un conjunto poroso lateral, por lo que existe una cota para la dimensión de Hausdorff de estos conjuntos, al igual que para los débilmente porosos usuales en espacios de tipo Ahlfors.

Corolario 6.24. *Si E es un conjunto débilmente poroso por derecha, entonces $\dim_H E \leq 1 - \frac{\log \beta_2}{\log \beta_1}$, donde β_1 y β_2 son las constantes que aparecen en el Lema 6.21.*

Demostración. Fijemos un intervalo abierto I y consideremos la función $\phi_I : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi_I(t) = |F(t \rho(I^+))|$, donde $F(\varepsilon) = E(\varepsilon) \cap \tilde{I}$ como en el Lema 6.21. Se sigue que ϕ_I es no decreciente, $\phi_I(t) \leq |I|$ y

$$\phi_I(\beta_1 t) \leq \beta_2 \phi_I(t), \quad \text{para todo } t \in (0, 1).$$

Fijo ahora $t \in (0, 1)$, elegimos $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{t}{\beta_1^m} < 1 \leq \frac{t}{\beta_1^{m+1}}$ (o, equivalentemente, $m < \frac{\log t}{\log \beta_1} \leq m + 1$). De aquí se sigue que

$$\phi_I(t) = \phi_I\left(\beta_1^m \frac{t}{\beta_1^m}\right) \leq \beta_2^m \phi_I\left(\frac{t}{\beta_1^m}\right) \leq \beta_2^m |I| \leq \frac{1}{\beta_2} t^{\frac{\log \beta_2}{\log \beta_1}} |I|.$$

Observando que $|F(\varepsilon)| = \phi_I\left(\frac{\varepsilon}{\rho(I^+)}\right)$, obtenemos

$$|F(\varepsilon)| \leq \frac{|I|}{\beta_2} \left(\frac{\varepsilon}{\rho(I^+)}\right)^{\alpha_0}, \quad (6.15)$$

para todo $0 < \varepsilon < \rho(I^+)$, donde $\alpha_0 := \frac{\log \beta_2}{\log \beta_1}$. La desigualdad 6.15 es análoga a (4.27), obtenida en el Capítulo 4 y usada para definir el exponente de Muckenhoupt; por lo que tal exponente podría definirse también en el sentido lateral.

Usando (6.15), podemos obtener una cota para la dimensión de Hausdorff de E de la siguiente manera. Si intersecamos E con un intervalo arbitrario J , recordemos que

$$\dim_H(E \cap J) \leq \overline{\dim}_M(E \cap J),$$

donde $\overline{\dim}_M$ es la dimensión de superior Minkowski. Supongamos ahora que J tiene extremos $a < b$ y definamos I como un intervalo abierto tal que $I^- = (a - 1, b + 1)$. Además, sea (c, d) un intervalo contenido en I^+ tal que $d - c = 2\rho(I^+)$. Entonces, se tiene que

$$(E \cap J)(\varepsilon) \subseteq E(\varepsilon) \cap (a - 1, \frac{c+d}{2}) = E(\varepsilon) \cap \tilde{I} = F(\varepsilon)$$

para todo $0 < \varepsilon < 1$. Ahora bien, para todo $s > 1 - \alpha_0$ y todo $0 < \varepsilon < \min\{1, \rho(I^+)\}$, se cumple

$$\frac{|(E \cap J)(\varepsilon)|}{\varepsilon^{1-s}} \leq \frac{|F(\varepsilon)|}{\varepsilon^{1-s}} \leq C(\sigma, \gamma, I) \varepsilon^{s+\alpha_0-1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Esto demuestra que

$$\overline{\dim}_M(E \cap J) \leq 1 - \alpha_0$$

para todo intervalo J . En consecuencia,

$$\dim_H E \leq 1 - \alpha_0.$$

■

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se han establecido múltiples resultados originales cuya demostración requirió el desarrollo y la aplicación de argumentos y técnicas igualmente novedosas. En conjunto, estos aportes representan un avance significativo en el estudio de los pesos distancia y, en particular, en la caracterización de los subconjuntos que los generan dentro de las clases de Muckenhoupt en contextos variados tanto del espacio ambiente como de las clases específicas de pesos consideradas. A continuación, se sintetizan los principales resultados obtenidos en cada uno de los capítulos centrales de la tesis.

- Capítulo 4** Se caracterizaron los subconjuntos de espacios de tipo homogéneo que admiten pesos distancia en la clase $A_1(X, d, \mu)$. Para ello, fue necesario extender la noción de conjuntos débilmente porosos introducida por Mudarra en [Mud25]. El resultado obtenido es, a la fecha, el más general en este sentido, ya que requiere como única hipótesis que las d -bolas del espacio ambiente (X, d, μ) sean abiertas, condición para nada restrictiva dado que toda clase de equivalencia de cuasi-métricas admite al menos un representante con esta propiedad. Asimismo, se introdujeron nuevos ejemplos de conjuntos débilmente porosos, como los conjuntos dispersos maximales en espacios uniformemente perfectos. Se demostró además que muchas de las nociones asociadas a la porosidad débil son invariantes bajo cambios de cuasi-métricas equivalentes y se estudiaron propiedades intrínsecas de estos conjuntos mediante pruebas basadas en lemas de cubrimiento y en cuasi-métricas especiales, como la introducida en [MS81].
- Capítulo 5** Se describieron por primera vez las propiedades fundamentales de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que admiten pesos distancia mediante herramientas novedosas basadas en medianas de la distribución de poros en un cubo dado. En este marco, se propusieron dos caracterizaciones para dichos conjuntos y se probó su equivalencia con la caracterización obtenida en el posterior trabajo independiente [PU25]. Se verificó además que la primera de estas caracterizaciones puede extenderse al contexto general de espacios de tipo homogéneo mediante una modificación adecuada de las herramientas introducidas y se presentó un enfoque probabilístico para el estudio de ejemplos de conjuntos euclídeos que admiten pesos distancia dentro de la teoría desarrollada.
- Capítulo 6** Se abordó por primera vez el problema de caracterizar conjuntos que admiten pesos distancia en las clases laterales $A_1^\pm(\mathbb{R})$. Para ello, se introdujo la noción de conjuntos débilmente porosos laterales y se analizaron sus propiedades fundamentales, destacando cómo la lateralidad se manifiesta en comparación con la porosidad débil clásica. Se obtuvo un marco unificador que engloba resultados de la teoría de pesos laterales y de pesos distancia estándar, demostrando que un subconjunto de la recta es débilmente poroso si y solo si es simultáneamente débilmente poroso por izquierda y por derecha. Finalmente, se presentaron ejemplos concretos que ilustran esta nueva familia de conjuntos y permiten diferenciarlos de su contraparte bilátera.

En conjunto, los resultados obtenidos profundizan la comprensión de la relación entre geometría y teoría de pesos, y abren nuevas líneas de investigación que se detallan en las siguientes páginas.

Problemas abiertos y trabajo futuro

Los resultados alcanzados en esta tesis no solo permiten resolver diversas cuestiones centrales en la teoría de los pesos distancia, sino que también dan lugar a nuevos interrogantes cuya resolución reviste un interés considerable, ya sea por su valor intrínseco o por las implicancias que podrían tener en el desarrollo futuro del área. En estas páginas se recopilan algunos de los problemas abiertos y líneas de investigación que emergen de manera natural a partir del trabajo realizado.

- ◇ A diferencia del caso euclídeo, los conjuntos de un espacio de tipo homogéneo que resuelven el Problema 3.15 requieren la hipótesis adicional de que $\rho_{d,E}$ sea duplicante, dado que la condición de porosidad débil no resulta suficiente en este contexto. Más allá de la condición de decaimiento en medida de los anillos (4.8) obtenida por Mudarra en espacios métricos, surge el interrogante de cuál es la condición adecuada que debe imponerse sobre un espacio de tipo homogéneo para garantizar que todo conjunto débilmente poroso (o incluso un conjunto arbitrario) satisfaga que $\rho_{d,E}$ es duplicante.
- ◇ El Lema 5.12 establece la denominada segunda caracterización para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que admiten pesos A_p . En comparación con la caracterización propuesta en [PU25], ésta presenta la restricción de tamaño $s < (1 + 2^n)^{-1}$, la cual surge del uso de dilataciones discretas de familias de cubos en la demostración. Un problema abierto consiste en determinar si es posible modificar dicho argumento, por ejemplo mediante el uso de dilataciones continuas como en la prueba del Teorema 5.17, para evitar esta restricción sobre el parámetro s .
- ◇ La demostración del Teorema 4.19 difiere de enfoques previos ([And+24; Mud25]) no solo por la mayor generalidad del enunciado, sino también por basarse en lemas de cubrimiento y otros argumentos elementales en lugar de estimaciones técnicas sobre sistemas diádicos, lo que brinda información adicional sobre el comportamiento de los conjuntos débilmente porosos. En este sentido, queda abierto el problema de determinar si este tipo de argumentos básicos puede adaptarse para obtener caracterizaciones análogas en el caso $p > 1$ en espacios de tipo homogéneo generales, evitando el uso de sistemas diádicos como los de Christ u otras adaptaciones ([Chr90; HK12]) en la redefinición de las funciones introducidas en la Definición 5.5.
- ◇ En relación con el punto anterior, para el caso $p > 1$ en espacios de tipo homogéneo surge la pregunta de si es necesaria una hipótesis adicional, análoga a la condición de duplicación de $\rho_{d,E}$ en el caso $p = 1$, para que resulten válidas tanto la segunda caracterización discutida en la Sección 5.3 como la condición de porosidad en medianas.
- ◇ Si bien se han presentado ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que admiten pesos distancia en $A_p \setminus A_1$ en [And+24; PU25], resta aún construir ejemplos concretos de este tipo en espacios más generales, idealmente en un sentido análogo al rol que cumple la Proposición 4.11 para el caso $p = 1$.
- ◇ En la Sección 6.3 del Capítulo 6 se conjeturó que los subconjuntos $E^* \subseteq \mathbb{R}$ para los cuales existe $\alpha > 0$ tal que $\text{dist}(\cdot, E^*) \in A_1^+(\mathbb{R})$ son necesariamente de la forma

$$E^* = E \cup [x^*, \infty),$$

donde E es débilmente poroso por derecha. Hasta el momento, solo se ha podido demostrar una de las implicaciones, por lo que permanece abierta la verificación de la implicación recíproca.

- ◇ Tanto en el caso de conjuntos débilmente porosos en espacios de tipo Ahlfors como en la versión lateral sobre la recta, se obtuvieron estimaciones para la dimensión de Hausdorff de conjuntos que satisfacen dichas propiedades. Un objetivo natural a futuro es mejorar estas estimaciones y obtener cotas dimensionales más generales para conjuntos que admiten pesos distancia en la clase A_∞ .
- ◇ Finalmente, un aspecto no explorado en esta tesis, y que presenta un grado de generalidad mayor, es el estudio de conjuntos que únicamente admitan pesos distancia meramente duplicantes, o incluso pesos que sean tan solo localmente integrables. En esta dirección, Mudarra presenta en [Mud25] un ejemplo de un conjunto de este tipo, lo que sugiere una línea de investigación más amplia y aún poco comprendida.

Bibliografía

- [ADL13] G. Acosta, R. G. Durán y F. López García. “Korn Inequality and Divergence Operator: Counterexamples and Optimality of Weighted Estimates”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 141.1 (2013), págs. 217-232.
- [ADM06] G. Acosta, R. G. Durán y M. A. Muschietti. “Solutions of the Divergence Operator on John Domains”. En: *Advances in Mathematics* 206.2 (2006), págs. 373-401.
- [Aik91] H. Aikawa. “Quasiadditivity of Riesz capacity”. En: *Math. Scand.* 69.1 (1991), págs. 15-30.
- [AE96] H. Aikawa y M. Essén. *Potential theory-selected topics*. Vol. 1633. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [Aim10] H. Aimar. “Balls as Subspaces of Homogeneous Type: On a Construction due to R. Macías and C. Segovia”. En: *Recent Developments in Real and Harmonic Analysis: In Honor of Carlos Segovia*. Ed. por Carlos Cabrelli y Jose Luis Torrea. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2010, págs. 25-36. ISBN: 978-0-8176-4588-5.
- [Aim13] H. Aimar. “Distance and Measure in Analysis and PDE”. En: *preprint* (2013).
- [Aim+14] H. Aimar, M. Carena, R. Durán y M. Toschi. “Powers of distances to lower dimensional sets as Muckenhoupt weights”. En: *Acta Mathematica Hungarica* 143.1 (2014), págs. 119-137.
- [AGG24] H. Aimar, I. Gómez e I. Gómez Vargas. *Weakly porous sets and A_1 Muckenhoupt weights in spaces of homogeneous type*. arXiv 2406.14369. 2024. arXiv: [2406.14369](https://arxiv.org/abs/2406.14369) [math.CA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2406.14369>.
- [Aim+25] H. Aimar, I. Gómez, I. Gómez Vargas y F. J. Martín-Reyes. “One-sided Muckenhoupt weights and one-sided weakly porous sets in $\mathbb{R}$ ”. En: *Journal of Functional Analysis* 289.10 (2025), pág. 111110. ISSN: 0022-1236.
- [AM84] H. Aimar y R. A. Macías. “Weighted norm inequalities for the Hardy–Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type”. En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 91.2 (1984), págs. 213-216.
- [Aim03] H. A. Aimar. “A quasi-metric space of homogeneous type modelling diffusion with non-uniformly elliptic thermal conductivity”. En: *Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003)*. Vol. 64. Colecc. Abierta. Univ. Sevilla Secr. Publ., Sevilla, 2003, págs. 11-22.
- [And+24] T. C. Anderson, J. Lehrbäck, C. Mudarra y A. V. Vähäkangas. “Weakly porous sets and Muckenhoupt A_p distance functions”. En: *J. Funct. Anal.* 287.8 (2024), Paper No. 110558, 34. ISSN: 0022-1236.
- [AL06] K. B. Athreya y S. N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. en. 2006.^a ed. Springer Texts in Statistics. New York, NY: Springer, jul. de 2006.
- [BS94] S. C. Brenner y L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [BF91] F. Brezzi y M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.

- [Chr90] M. Christ. "A T(b) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral". En: *Colloquium Mathematicae* 60-61.2 (1990). Colloq. Math. 60/61 (2), págs. 601-628.
- [Com22] J. Comesatti. "Análisis armónico asociado a problemas espectrales para operadores de tipo diferenciación fraccionaria en espacios métricos con medida". Doctorado en Matemática. Director: Hugo Aimar. Codirectora: Ivana Gómez. Tesis doctoral. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral, 2022.
- [DS04] A. Dall'Acqua y G. Sweers. "Estimates for Green Function and Poisson Kernels of Higher-Order Dirichlet Boundary Value Problems". En: *Journal of Differential Equations* 205.2 (2004), págs. 466-487.
- [DiB93] E. DiBenedetto. *Degenerate Parabolic Equations*. Universitext. New York: Springer, 1993. ISBN: 978-0-387-94020-3.
- [DL10] R. G. Durán y F. López García. "Solutions of the divergence and analysis of the Stokes equations in planar Hölder- α domains". En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.1 (2010), págs. 95-120.
- [DST08] R. G. Durán, M. Sanmartino y M. Toschi. "Weighted A Priori Estimates for the Poisson Equation". En: *Indiana University Mathematics Journal* 57.7 (2008), págs. 3463-3478.
- [DST10] R. G. Durán, M. Sanmartino y M. Toschi. "Weighted A Priori Estimates for Solution of $(-\Delta)^m u = f$ with Homogeneous Dirichlet Conditions". En: *Analysis and Theory of Applications* 26.4 (2010), págs. 339-349.
- [Dyd+19] B. Dyda, L. Ihnatsyeva, J. Lehrbäck, H. Tuominen y A. V. Vähäkangas. "Muckenhoupt A_p -properties of distance functions and applications to Hardy-Sobolev-type inequalities". En: *Potential Anal.* 50.1 (2019), págs. 83-105. ISSN: 0926-2601.
- [El 05] R. El Attar. *Special Functions and Orthogonal Polynomials*. United States: Lulu Press Inc, 2005. ISBN: 9781411666900.
- [Fal14] K. J. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. Third. John Wiley Sons, 2014.
- [Fri37] K. O. Friedrichs. "On Certain Inequalities and Characteristic Value Problems for Analytic Functions and for Functions of Two Variables". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 41.3 (1937), págs. 321-364.
- [GR85] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. Vol. 116. North-Holland Mathematics Studies. Amsterdam / New York: North-Holland / Elsevier, 1985.
- [GG98] G. Geymonat y G. Gilardi. "Contre-exemples à l'inégalité de Korn et au Lemme de Lions dans des domaines irréguliers". En: *Équations aux Dérivées Partielles et Applications*. Ed. por Jacques-Louis Lions. Paris, France: Gauthier-Villars / Éditions scientifiques et médicales Elsevier, 1998, págs. 541-548.
- [GR86] V. Girault y P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [Góm26] I. Gómez Vargas. "New characterizations of Muckenhoupt A_p distance weights for $p > 1$ ". En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 556.1, Part 1 (2026), pág. 130091. ISSN: 0022-247X.
- [Gra14] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. 3.^a ed. Vol. 249. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2014.

- [Gus74] J. Gustavsson. “Metrization of Quasi-Metric Spaces”. En: *Mathematica Scandinavica* 35 (1974), págs. 56-60.
- [Guz81] M. de Guzmán, ed. *Real Variable Methods in Fourier Analysis*. Vol. 46. North-Holland Mathematics Studies. Amsterdam, NL: North-Holland Publishing Company, 1981.
- [HL30] G. H. Hardy y J. E. Littlewood. “A maximal theorem with function-theoretic applications”. En: *Acta Mathematica* 54.1 (1930), págs. 81-116.
- [HS65] E. Hewitt y K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1965.
- [Hor91] T. Horiuchi. “The imbedding theorems for weighted Sobolev spaces. II”. En: *Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A* 23 (1991), págs. 11-37.
- [HK12] T. Hytönen y A. Kairema. “Systems of dyadic cubes in a doubling metric space”. En: *Colloquium Mathematicae* 126.1 (2012), págs. 1-33.
- [KLV21] J. Kinnunen, J. Lehrbäck y A. Vähäkangas. *Maximal Function Methods for Sobolev Spaces*. Vol. 257. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 2021, págs. xii+338.
- [LMV26] H. Lahdelma, K. Myrskyläinen y A. V. Vähäkangas. *Parabolic weak porosity and parabolic Muckenhoupt distance functions*. 2026. arXiv: 2604.12561 [math.CA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2604.12561>.
- [Ler08] A. K. Lerner. “A pointwise estimate for the local sharp maximal function with applications to singular integrals”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 136.8 (2008), págs. 2829-2837.
- [Lóp10] F. López García. “Una inversa a derecha para el operador divergencia en dominios con cúspides”. Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2010.
- [MS79] R. Macías y C. Segovia. “Lipschitz functions on spaces of homogeneous type”. En: *Advances in Mathematics* 33.3 (1979), págs. 257-270. ISSN: 0001-8708.
- [MS81] R. Macías y C. Segovia. “A Well Behaved Quasi-distance for Spaces of Homogeneous Type”. En: *Trabajos de Matemática IAM* 32 (1981), págs. 1-18.
- [Mar93] F. J. Martín-Reyes. “New Proofs of Weighted Inequalities for the One-Sided Hardy–Littlewood Maximal Functions”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 117.3 (1993), págs. 691-698.
- [MOT90] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador y A. de la Torre. “Weighted inequalities for one-sided maximal functions”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 319.2 (1990), págs. 517-534.
- [Maz11] V. G. Maz’ya. *Sobolev Spaces*. 2.^a ed. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin: Springer, 2011.
- [Mos95] U. Mosco. “Variational metrics on self-similar fractals”. En: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 321.6 (1995), págs. 715-720.
- [Mos97] Umberto Mosco. “Variational fractals”. En: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze* 25.3-4 (1997), págs. 683-712. URL: https://www.numdam.org/item/ASNSP_1997_4_25_3-4_683_0/.

- [Muc72] B Muckenhoupt. “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 165 (1972), págs. 207-226.
- [Mud25] C. Mudarra. “Weak porosity on metric measure spaces”. En: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* (2025), págs. 1-48.
- [PU25] M. Pasquariello e I. Uriarte-Tuero. *Medians, Oscillations, and Distance Functions*. arXiv 2507.21020. 2025. arXiv: [2507.21020 \[math.CA\]](https://arxiv.org/abs/2507.21020). URL: <https://arxiv.org/abs/2507.21020>.
- [RS97] L. de Rosa y C. Segovia. “One-Sided Littlewood-Paley Theory”. En: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 3.S1 (1997), págs. 933-958.
- [Saw86] E. Sawyer. “Weighted inequalities for the one-sided Hardy–Littlewood maximal functions”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 297 (1986), págs. 53-61.
- [Sem96] S. Semmes. “On the nonexistence of bilipschitz parameterizations and geometric problems about A_∞ -weights”. En: *Rev. Mat. Iberoam.* 12.2 (1996), págs. 337-410.
- [Shm11] P. Shmerkin. “Porosity, dimension, and local entropies: a survey”. En: *Rev. Un. Mat. Argentina* 52.1 (2011), págs. 81-103.
- [Sou04] P. Souplet. “A Survey on L^p_δ Spaces and Their Applications to Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems”. En: *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. Vol. 20. GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. Tokyo: Gakkōtoshō, 2004, págs. 464-479.
- [Tem84] R. Temam. *Navier–Stokes Equations*. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [Vas03] A. V. Vasin. “The limit set of a Fuchsian group and Dyn’kin’s lemma”. En: *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 303. Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funkts. 31 (2003), págs. 89-101, 322. ISSN: 0373-2703.
- [Vas25] A. V. Vasin. “On characterization of weakly porous sets via dyadic coverings”. En: *Journal d’Analyse Mathématique* 157.2 (oct. de 2025), págs. 789-802. ISSN: 1565-8538.