

MODELADO Y SIMULACIÓN DE
MICRO-INTERRUPTORES DE RADIOFRECUENCIA
(SWITCH RF-MEMS)

por

Lic. Juan José Gómez Barroso



FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Tesis presentada para el grado de

Doctor en Ingeniería - Mención Mecánica Computacional

2014

Agradecimientos

En principio no puedo dejar de agradecer a todo el pueblo argentino, por su lucha constante para mantener en el tiempo una educación pública gratuita. Gracias a estas luchas he podido terminar mi carrera de grado, y me permitió realizar este doctorado remunerado. Gracias también a quienes hicieron posible esta tesis: mis directores Alberto Cardona y Claudio Berli, a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) que financiaron este trabajo y a las universidades nacionales de San Luis (UNSL) y del Litoral (UNL), a sus docentes, no docentes y alumnos, que son responsables de mi formación académica.

En el espacio de vínculos afectivos, agradezco a mi madre María Inés por su incansable fortaleza y ejemplo de vida y a mi padre y maestro de la vida Juan Antonio, a ellos dos y a su incondicional apoyo. A mi hermana Julia y a mis hermanos Guillermo, Arturo y Luis, que a pesar de la distancia están siempre a mi lado, con consejos permanentes; no sólo son hermanos, sino verdaderos amigos. Al cariño de mis queridos sobrinos Ulises, Lucas, Jeremías y Matías y mi sobrina la hermosa Emma. A mi pareja Alejandra, por su aguante, comprensión y compañerismo en estos últimos años. A mis grandes amigas de la vida: Belu y Flor, a mi compañera de viajes Pauli, y mis hermanos postizos Melpa y Mauri, y muchos otros y otras que me mantienen vivo al compartir tantos momentos inolvidables.

Al compañero Cris y a la compañera Maru, y a todos los compañeros y compañeras y amistades con los que he transitado un camino buscando un mundo donde quepan todos los mundos.

Agradezco también a personas que han sido grandes ejemplos: el Gran Maestro Shoei Miyazato y su hijo, Sensei Masatoshi Miyazato, al Sensei Hirai y

todas mis amistades y alumnado de la Escuela Miyazato de Karate Do, que están siempre apoyando en todos los aspectos de mi vida.

Al personal del Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CI-MEC), particularmente a los compañeros y compañera de oficina, con quienes logramos mantener un buen ámbito laboral.

No pretendo olvidar a nadie que de alguna u otra forma me han sabido acompañar durante este ciclo que se cierra con esta tesis, y que da comienzo a una nueva etapa en mi vida. A todos y todas, muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
2. Micro-interruptores de radiofrecuencia (RF-Switch)	7
2.1. Introducción	7
2.2. Aplicaciones de la tecnología RF-MEMS	7
2.3. Microfabricación	10
2.3.1. Microfabricación: descripción del proceso	11
2.3.2. Principios de Actuación	12
2.4. Amortiguamiento	14
2.4.1. Presencia de perforaciones	15
2.5. Consideraciones finales y motivaciones	16
3. Amortiguamiento viscoso: flujo de estrujamiento (<i>squeeze flow</i>)	17
3.1. Introducción	17
3.2. Fenómeno de <i>squeeze</i>	18

ÍNDICE GENERAL

3.3. Ecuación de Reynolds	19
3.3.1. Derivación de la Ecuación de Reynolds a partir de Navier-Stokes	21
3.3.2. Soluciones analíticas para problemas simples	24
3.3.3. Fuerza de amortiguamiento sobre la microplaca	31
3.4. Análisis en frecuencia: Ejemplo de aplicación	33
3.4.1. Aplicación y resultados para la placa rígida	34
4. Método de Elementos Finitos en microplacas	37
4.1. Introducción	37
4.2. Formulación diferencial del modelo	37
4.3. Modelo Numérico y Método de Elementos Finitos	38
4.3.1. Problema Estructural	38
4.3.2. Problema del fluido confinado	41
4.3.3. Sistema final acoplado	42
4.4. Implementación	43
5. Modelo para microplacas con perforaciones	49
5.1. Introducción	49
5.2. Revisión de otros modelos presentados en la literatura	49
5.2.1. Método PPR (Perforation Profile Reynolds)	50
5.2.2. Método de Homogeneización	52

5.3. Modelo propuesto en esta Tesis	53
5.3.1. Condiciones de contorno y formulación general completa	54
5.3.2. Modelo Numerico y MEF	55
5.3.3. Expresiones de las resistencias	58
6. Aplicación del modelo: Análisis y Discusión de Resultados	61
6.1. Introducción	61
6.2. Comparación con otros modelos numéricos	61
6.2.1. Placa cuadrada rígida con velocidad vertical impuesta	61
6.2.2. Discusión de los resultados	64
6.3. Estudio de ejemplos experimentales	64
6.3.1. Acoplamiento con el campo eléctrico	64
6.3.2. Análisis armónico y acoplamiento electro-mecano-fluídico	66
6.3.3. Comparación de resultados	67
6.3.4. Análisis y discusión de resultados	75
7. Conclusiones	79
7.1. Conclusiones finales	79
7.2. Trabajo a Futuro	81

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de switch RF-MEMS. Imágenes obtenidas en la CNEA. Los orificios de la superficie de la membrana son de $8\mu\text{m}$ de diámetro	8
2.2. Esquema de la sección transversal del proceso de fabricación de un microswitch. Figura proporcionada por la CNEA.	13
2.3. Visualización de las vigas cantilevers modeladas en SAMCEF Field.	14
2.4. Resultados experimentales (en línea continua con puntos azul) y datos de simulación (puntos rojos).	14
2.5. Esquema de un switch de derivación capacitiva actuado electrostáticamente. Figura extraída de la tesis de Rochus (2006)	14
3.1. Placa móvil con desplazamiento normal al sustrato. Los vectores simples simbolizan al fluido, y el vector doble, el movimiento normal de la placa.	20
3.2. Caso I: Esquema de la placa rígida sometida a movimiento armónico vertical. Se muestra sistema de referencia usado.	26
3.3. Caso II: Placa flexible con dos lados libres.	27
3.4. Caso III: Placa flexible empotrada en un extremo (<i>cantilever</i>).	31
3.5. Caso I: Problema de placa rígida.	35
3.6. Caso I: Componente de <i>damping</i> del coeficiente de amortiguamiento.	35

ÍNDICE DE FIGURAS

3.7. Caso I: Componente de <i>stiffness</i> del coeficiente de amortiguamiento. . .	35
4.1. Campo de presiones a $2 \times 10^5 rad/s$. Arriba: datos obtenidos de la simulación del modelo. Abajo: Modelo analítico.	46
4.2. Deflexión de la placa doblemente empotrada, con un desplazamiento armónico impuesto en la dirección normal.	47
4.3. Amplitud de desplazamiento del punto medio de la placa en función de la frecuencia.	48
5.1. Modelo de circuito con resistencias mecánicas propuesto por Veijola. . .	51
5.2. Dominio Ω (en gris) y fronteras con distintas condiciones de contorno. .	54
5.3. Esquema de una perforación, vista lateral.	54
5.4. Esquema de la perforación como circuito con resistencias hidráulicas. . .	56
5.5. Esquema para el análisis del contorno Γ_P	56
5.6. Diferentes geometrías de perforaciones y sus parámetros.	58
6.1. Esquema de la placa perforada para los ejemplos numéricos.	62
6.2. Perfiles de presión obtenidos con el modelo. A la izquierda $s_0 = 0.5\mu m$ y $h_c = 5\mu m$. A la derecha $s_0 = 3\mu m$ y $h_c = 1\mu m$	62
6.3. Resistencia mecánica en función de la razón del área ocupada por las perforaciones. En línea continua resultados con Oofelie y en puntos resultados con modelo full 3D.	63
6.4. Malla de la geometría dentro de volumen dieléctrico para el caso de un cantilever con perforaciones.	67
6.5. Fotografía de cantilever usado en modelos experimentales (Rochus et al. 2012) sin perforaciones (arriba) y con perforaciones (abajo).	67

6.6. Visualización del campo eléctrico en el análisis estático. Viga sin perforaciones (arriba) y con perforaciones (abajo).	69
6.7. Cantilever sin perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros nominales (línea continua con puntos).	70
6.8. Cantilever con perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros nominales(línea continua con puntos).	70
6.9. Perfiles de presiones de los cantilevers. Arriba: Caso sin perforaciones. Abajo: Caso con 5 perforaciones.	71
6.10. Modelo de placa perforada realizado en Samcef Field	72
6.11. Deflexión de la placa por actuación electrostática.	73
6.12. Gráficas de la deflexión de la placa.	74
6.13. Amplitud de desplazamiento en función de la frecuencia	75
6.14. Cantilever sin perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros ajustados(línea continua con cuadrados).	76
6.15. Cantilever con perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros ajustados(línea continua con cuadrados).	76

Índice de tablas

2.1. Lista de los procesos de crecimiento de la membrana de oro y sus refuerzos en los empotramientos.	12
6.1. Errores cometidos para diferentes ejemplos. Se utiliza gap $h = 1\mu m$. . .	63
6.2. Datos obtenidos para la placa perforada	75

Capítulo 1

Introducción

Los MEMS (sistemas micro-electromecánicos) son dispositivos de volúmenes menores a 1 mm^3 que están produciendo un gran impacto tecnológico en diversas áreas de la ingeniería eléctrica, espacial y de materiales, como así también en telecomunicaciones y medicina (por ejemplo, [Judy, 2001](#); [Ko, 2007](#)). Los MEMS se construyen usando procesos de ataque químico (etching) y micro-maquinado, conocidos en la industria de semiconductores, como así también por un amplio espectro de métodos de microfabricación heredados de la tecnología de Circuitos Integrados, como otros propios de la tecnología MEMS. Debido a su escala microscópica, se hace imposible o extremadamente difícil construir articulaciones y rodamientos como los existentes en mecanismos convencionales. En consecuencia, los MEMS trabajan típicamente como mecanismos flexibles que logran su movilidad por deformación elástica.

Tradicionalmente, se han clasificado los dispositivos MEMS en dos grandes grupos: los sensores y los actuadores. Mientras los sensores están destinados a capturar información de algún parámetro físico, los actuadores son dispositivos móviles, normalmente actuados por señales eléctricas, capaces de cambiar las propiedades del sistema sobre el que actúan, como por ejemplo, los conmutadores de radiofrecuencia (RF)/microondas. Centrándonos en el área de las telecomunicaciones, los microsistemas están siendo cada vez más utilizados, especialmente en el campo de las comunicaciones ópticas y, desde finales de los años noventa, en el campo de RF/microondas dando lugar a los llamados RF-MEMS.

Los interruptores RF-MEMS, o micro-switch, son dispositivos micro-actuadores que

1. INTRODUCCIÓN

básicamente utilizan un movimiento mecánico para cambiar de estado. El origen del movimiento de estos dispositivos es una fuerza generada por una inyección externa de energía. Las fuerzas que producen el movimiento mecánico pueden ser obtenidas por varios principios de actuación, siendo los más comunes el electrostático, el electrotérmico y el magnético. El principio de actuación electrostático es el más utilizado y estudiado. Se basa en la aplicación de una diferencia de potencial eléctrico entre dos placas paralelas o electrodos siendo una de las placas fija y la otra móvil. En consecuencia, aparece una fuerza de atracción electrostática entre ambas placas que provoca que la placa móvil se aproxime a la fija a medida que la tensión se incrementa, llegando a colapsar a una determinada tensión denominada de actuación o de *pull-in*. La ventaja principal de este tipo de actuación es la ausencia de consumo de corriente, en contrapartida, presenta algunos inconvenientes como por ejemplo los altos voltajes que en determinadas ocasiones se pueden necesitar para conseguir la actuación del dispositivo.

Debido a la reducida dimensión e inercia de los micro-dispositivos, se hace igualmente necesario estudiar el efecto que produce la disipación por fricción con el aire, lo cual concierne a la Microfluídica de gases.

Vemos en consecuencia la naturaleza inherentemente multifísica que plantea el diseño de MEMS, en particular los switch RF-MEMS, que será el principal objeto de estudio de esta tesis. Es fundamentalmente necesario obtener modelos matemáticos que representen la interacción de los campos antes descritos. La solución analítica de estos modelos sólo puede realizarse en un número limitado de casos. En consecuencia, la simulación numérica resulta una herramienta indispensable para analizar y predecir el comportamiento físico de los micro-dispositivos. El desarrollo del software necesario, utilizando los métodos numéricos adecuados (como Elementos Finitos) nos permite analizar el comportamiento de los micro-dispositivos en tiempos razonables, y llegar a optimizar el diseño del dispositivo MEMS.

El objetivo general de la tesis es desarrollar el software necesario para abordar problemas de multifísica mediante técnicas propias de la mecánica computacional, utilizando herramientas y técnicas de programación orientada a objetos. En particular, se desarrolla el software para el análisis y diseño de MEMS donde se presenta la interacción de campos de deformación elástica, térmicos, electrostáticos, electromagnéticos, piezoeléctricos, y de flujo. Los objetivos específicos de la tesis son:

- El desarrollo de software para resolver problemas en multifísica con acoplamiento

to entre el campo electrostático y de deformación elástica, y principalmente el amortiguamiento viscoso (campo de flujo).

- Implementación de estrategias dinámicas de interacción entre campos con el fin de lograr una buena eficiencia de cálculo, en diferentes entornos de programación dentro del paradigma orientado a objetos.
- La resolución de aplicaciones que responden a necesidades de simulación en micro electromecánica, por ejemplo, los switch RF-MEMS.

Como veremos más adelante, desde el punto de vista mecánico podemos identificar tres puntos importantes en el estudio de los switch RF-MEMS, a saber, los procesos de fabricación, la generación de tensiones residuales por estos procesos, y el amortiguamiento en las partes móviles del dispositivo, principalmente debido al gas que lo rodea (amortiguamiento viscoso). Asimismo, otros aspectos de interés son los principios de actuación (electrostático principalmente) y el amortiguamiento termoelástico.

En términos generales, esta tesis se enfoca en el amortiguamiento debido al flujo de estrujamiento producido por el aire confinado entre placas paralelas, una de ellas fija y la otra móvil. En este último punto, podemos encontrar en la literatura varios modelos analíticos (ejemplo, [Pandey et al., 2007](#); [Veijola, 2004](#)) y algunos con cálculos numéricos ([Pandey y Pratap, 2008](#); [De Pasquale y Veijola, 2008](#); [Nayfeh y Younis, 2004](#)). Todos ellos fueron realizados para geometrías simples. Podemos encontrar también una serie de publicaciones recientes que analizan el efecto de las perforaciones de placas móviles frecuentes en este tipo de dispositivos, tanto en los modelos analíticos como numéricos, (por ejemplo, [Bao et al., 2003a,b](#); [Mohite et al., 2005](#); [Veijola, 2006b,a](#); [Pandey y Pratap, 2008](#); [De Pasquale y Veijola, 2008](#); [Somà y De Pasquale, 2008](#); [Veijola et al., 2009](#); [Homentcovschi y Miles, 2010](#)).

Algunos de estos trabajos resuelven el campo de flujo por medio de modelos 3D de la ecuación de Navier-Stokes (ejemplo, [Homentcovschi y Miles, 2010](#)), mientras que otros lo realizan, bajo ciertas hipótesis sobre el fluido y las dimensiones en cuestión, con modelos 2D usando la ecuación de Reynolds no lineal ([Bao et al., 2003a,b](#); [Veijola et al., 2009](#); [Pandey y Pratap, 2008](#), entre otros). En este caso, para modelar las perforaciones se modifica la ecuación diferencial del modelo agregando un término de admitancia de flujo adicional. Por su parte, los modelos de homogeneización resuelven de manera global el campo de presiones, considerando que cada perforación se encuentra en una celda de iguales características para cada perforación, con una distribución uniforme de las mismas (por ejemplo, [Veijola, 2006b,a](#)).

1. INTRODUCCIÓN

El modelo que se presenta en esta tesis es independiente de estas celdas, proponiendo un análisis particular sobre cada perforación (independencia de la ubicación de las perforaciones en el dominio). No se modifica la formulación diferencial (Ecuación de Reynolds), y por el contrario, se analizan las perforaciones a través de condiciones de contorno mixtas. Se tienen en cuenta efectos de borde debido al flujo de estrujamiento, y condiciones de entrada y salida de flujo en cada perforación.

Cronológicamente, se presenta en diferentes congresos la evolución del modelo. En este sentido, en el congreso ENIEF 2009 ([Gomez Barroso et al., 2009](#)) se presenta el modelo por el método de elementos finitos para resolver la ecuación de Reynolds no lineal, validando dicho modelo con resultados analíticos. Más adelante, en ENIEF 2011 y MECOM 2012 ([Gomez Barroso et al., 2012](#)) se realizan las primeras aproximaciones del modelo para el caso de placas perforadas comparando resultados con ejemplos experimentales y otros modelos. En 2013 ([Gomez Barroso et al., 2013](#)) finalmente, se presenta el modelo completo para el flujo de estrujamiento en placas perforadas y se obtienen resultados satisfactorios comparado con otros modelos de la bibliografía, destacando las ventajas del mismo. La implementación de este modelo en el software Oofelie, como veremos en las aplicaciones, nos ofrece la gran ventaja de poder resolver problemas acoplados con otros campos, por ejemplo, problemas fluido-electro-mecánicos, que son los que principalmente se encuentran presentes en los interruptores MEMS actuados eléctricamente.

La tesis se organiza de la siguiente manera. El Capítulo [2](#) describe propiedades, aplicaciones y procesos de fabricación de los Switch RF-MEMS, que son los dispositivos que motivan el estudio y los modelos propuestos en esta tesis. El Capítulo [3](#) se refiere al principal efecto de amortiguamiento en estos dispositivos, a saber, el ejercido por el aire que lo rodea. Se describe el fenómeno de estrujamiento (*squeeze*), se muestran soluciones analíticas para el campo de presiones y la fuerza que ejerce el fluido confinado entre placas paralelas debido a un movimiento armónico, analizando el comportamiento a bajas y altas frecuencias. En el Capítulo [4](#) se presenta el modelo desarrollado, basado en el Método de Elementos Finitos, para simular el fenómeno de *squeeze*, mostrando la formulación diferencial, la forma débil y el sistema final acoplado con la parte estructural de la placa móvil. El Capítulo [5](#), a modo de continuación, presenta la modificación al modelo anteriormente descrito, agregando la presencia de perforaciones, tratadas por medio de condiciones de contorno mixtas, lo cual resulta en una gran ventaja frente a los modelos reportados en la literatura, y confiere originalidad al presente trabajo. En el Capítulo [6](#) se muestran resultados que permiten validar el modelo de los Capítulos [4](#) y [5](#) tanto en ausencia como en presencia de perforaciones. Los modelos son comparados con

resultados de simulación de otros modelos numéricos, como así también con resultados experimentales, ambos obtenidos de la bibliografía. Para algunos ejemplos se acopla también el campo eléctrico, evidenciando la facilidad que tiene el Software utilizado en el desarrollo del modelo para acoplar diferentes campos actuantes. Finalmente, se describen en el Capítulo [7](#) las conclusiones finales de la tesis.

Capítulo 2

Micro-interruptores de radiofrecuencia (RF-Switch)

2.1. Introducción

En este capítulo se hace referencia a los micro-dispositivos que son objeto principal de estudio en esta tesis: los Micro-interruptores de Radiofrecuencia (Switch RF - MEMS), definidos y descritos brevemente en el Capítulo [1](#). Los MEMS (sistemas micro-electro-mecánicos) son dispositivos de pequeñas dimensiones compuestos por elementos activos y pasivos microfabricados y que realizan diferentes funciones como percepción, procesamiento de datos, comunicación y actuación sobre el entorno. Los tipos de dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras relativamente simples que no tienen ninguna parte móvil, hasta sistemas electromecánicos muy complejos en la que múltiples elementos se mueven bajo el control de la electrónica integrada ([Torrejón Yuste, 2011](#)). El interruptor o conmutador (switch) quizás sea el componente MEMS más desarrollado, simple pero vital en un sinnúmero de aplicaciones electrónicas. Es simplemente un dispositivo para cerrar o abrir un circuito eléctrico, con la importancia que esto implica ([Aróztegui et al., 2011](#)). Se presenta aquí una descripción más completa de los dispositivos, centrando la atención en los principios de actuación para su funcionamiento. Se dedica una sección de este capítulo a los diferentes casos de amortiguamiento presentes en estos dispositivos, desarrollando más detalladamente el amortiguamiento viscoso en el siguiente capítulo, que es el tema central de esta tesis.

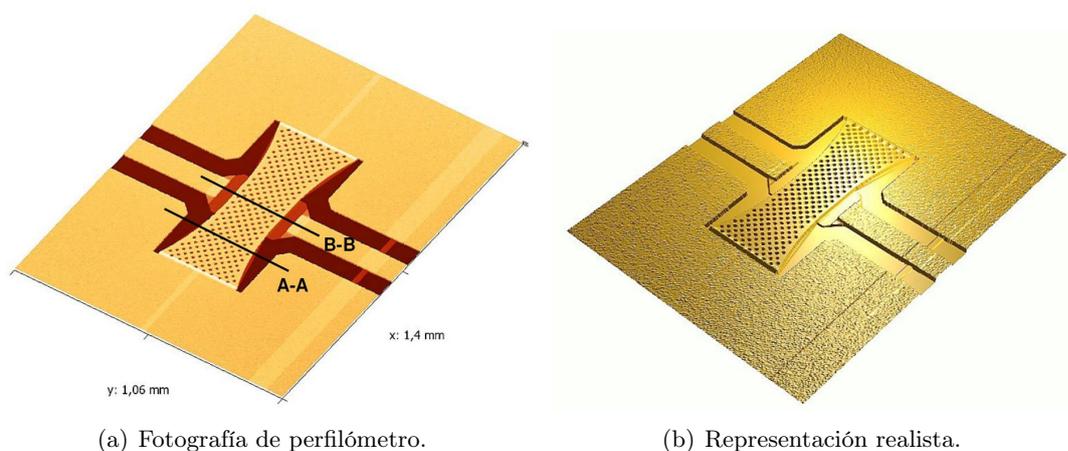


Figura 2.1: Ejemplo de switch RF-MEMS. Imágenes obtenidas en la CNEA. Los orificios de la superficie de la membrana son de $8\mu\text{m}$ de diámetro

2.2. Aplicaciones de la tecnología RF-MEMS

La comunicación inalámbrica ha tenido un crecimiento acelerado gracias a la aplicación de tecnologías MEMS, particularmente el uso de microresonadores switch de radiofrecuencia (Switches RF-MEMS). Existen otros ejemplos de su uso, como en comunicaciones inalámbricas y sistemas de radar para cambiar entre la transmisión y la recepción. También se utilizan en teléfonos multibanda para dirigir la señal a los diferentes bloques. En electrónica, los switch RF más comunes son los interruptores de semiconductores como diodos PIN, GaAs MESFET y JFET (Rochus, 2006). Por lo tanto, la realización de dispositivos mediante la tecnología RF-MEMS es la más utilizada para la fabricación de dispositivos inalámbricos en diferentes ámbitos. De Los Santos et al. (2004b) muestran varias aplicaciones, que podemos comentar a continuación:

RF-MEMS para Microteléfonos. Los microteléfonos inalámbricos acrecientan sus funcionalidades radicalmente. Sus primeras aplicaciones -llamadas y mensajes de texto- hoy representan un porcentaje cada vez menor del microteléfono. Las funciones adicionales como juegos, cámaras, reproductores de música, etc., son cada vez más comunes. Las aplicaciones involucradas en transferencia de datos en RF son las más importantes en el estudio de dispositivos inalámbricos a pequeña escala. Podemos distinguir tres tipos fundamentales de estas aplicaciones: *el celular* con la propiedad fundamental del gran área que cubre. Las aplicaciones que comprende serían: llamadas, mensajes de texto, acceso a Internet, etc. Otro tipo que podemos distinguir es *la interconectividad*

que a diferencia del tipo anterior se caracteriza por la conexión local, sin uso de una red grande. Ejemplos de estas aplicaciones son: Bluetooth y Zigbee. El tercer tipo es de *transferencia de datos por difusión*, que se utiliza solamente para recibir información. Entre los ejemplos más comunes tenemos la radio FM, recepción de TV y los Sistemas Globales de Posición (GPS).

La tendencia actual es lograr la convergencia de estas funcionalidades hacia la radio de RF, teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el tamaño y la eficiencia de la potencia necesaria para el funcionamiento. En este contexto, los interruptores MEMS resistivos (óhmicos) y capacitivos (condensadores variables) son el nexo que se propone desde la tecnología microelectromecánica para lograr esa convergencia. Estos dispositivos MEMS poseen propiedades de bajas pérdidas y alta linealidad respecto de otras tecnologías de semiconductores. Esto garantiza la reutilización de los circuitos lo que reduce la cantidad de espacio (*board space*) necesario para incorporar los grupos de tecnologías que se mencionaron anteriormente.

RF-MEMS para Estaciones Base. Una estación base de telefonía móvil es una estación de transmisión y recepción situada en un lugar fijo, compuesta de una o más antenas de recepción/transmisión, una antena de microondas, y un conjunto de circuitos electrónicos, la cual es utilizada para manejar el tráfico telefónico. Actúa como puente entre todos los usuarios de móviles de una misma célula, y conecta las llamadas de los móviles con la central de conmutación ¹.

La aplicabilidad de la tecnología RF-MEMS está dirigida principalmente a la arquitectura de las Estaciones Base Reconfigurables², en la utilización de interruptores y condensadores variables. También en circuitos habilitados por RF-MEMS. Al igual que para microteléfonos, se aprovecha la capacidad de realizar sistemas de RF inalámbricos capaces de servir (es decir, seleccionar) múltiples bandas de frecuencias. Por lo tanto, se puede aprovechar los siguientes beneficios de la tecnología RF-MEMS: conmutación de bajas pérdidas y alto aislamiento (conmutador ideal); amplia habilidad de sintonización con condensadores variables; y es posible la separación de la senda de RF y los terminales de control (similar a los relevadores).

¹Fuente: Glosario de *Canadian Radio-television and Telecommunications Commission*.

<http://www.crtc.gc.ca>

²Reconfiguración se refiere a que las características RF pueden redefinirse mediante Software.

RF-MEMS para Aplicaciones en el Espacio. Los satélites de comunicación son los que hacen posible la conectividad inalámbrica global. Éstos tienen que procesar el agregado de información en el contexto de una generación de potencia disponible y de una capacidad de almacenaje limitadas. Es por esto que los interruptores RF-MEMS se utilizan para aumentar las capacidades de los satélites, minimizando a su vez la masa de lanzamiento. Esto es muy importante, no sólo en los satélites tradicionales de gran tamaño, sino también en el caso de los Nanosatélites, utilizados para inspección, reparación y suministro de combustible, o centinela para satélites más grandes. También son utilizados para habilitar aplicaciones de "Internet en el Cielo", y para aplicaciones militares.

La aplicación actual de los interruptores RF-MEMS en la tecnología aeroespacial logra resultados impresionantes. Una de las motivaciones para desarrollar esta tecnología fue la de suponer que era posible desarrollar cambiadores de fase con pérdidas bajas, haciendo posible la agrupación de antenas controladas por fase de bajo consumo de potencia. Estas suposiciones se fundamentan en la comparación con dispositivos similares realizados con la tecnología basada en FET de GaAs.

2.3. Microfabricación

Los dispositivos MEMS se fabrican utilizando en parte, procesos de fabricación basados en la industria microelectrónica, y otros provenientes de tecnologías emergentes. Se logra hoy en día microfabricar casi cualquier tipo de máquinas imaginadas por el diseñador. Se considera que el primer MEMS se desarrolló en 1967 ([Nathanson et al. 1967](#)), cuando se pudo realizar por primera vez la micromaquinación en superficie e integrar monolíticamente la electrónica de control en la misma oblea de silicio. Esta integración es muy común hoy en día, por ejemplo en los acelerómetros.

Uno de los principales desafíos en la fabricación de switch MEMS es tener vigas o puentes sin deformaciones fuera del plano. La deformación puede derivarse de las tensiones residuales en las vigas o la flexión inducida por la fuerza electrostática ([Rangra, 2005](#)). Como ejemplo de alguno de los procesos de microfabricación, podemos ver los Micro-Cantilevers, ([Kang et al., 2008](#)) que son fabricados con electroplateado de oro (*electroplating*) y liberación de las partes por medio de remoción de la capa de sacrificio mediante plasma con ataques a alta temperatura (*plasma ashing*) para investigar las características de deformación de las estructuras MEMS. Estos procesos involucran etapas de diseño muy complejas, considerando grandes gradientes de temperatura que

generan tensiones residuales en el dispositivo final. En general, se realiza primero una deposición delgada para mejorar la adherencia del dispositivo a la oblea, y luego se deposita el material (oro). Para lograr diferentes alturas, y dispositivos fuera del plano de la oblea, se fabrican diferentes capas, tanto del material (por *electroplating*), como capas de sacrificio de resinas fotosensibles. Estas últimas son removidas por exposición UV, y el cantilever es liberado por *ashing* de plasma en seco.

2.3.1. Microfabricación: descripción del proceso

A modo ilustrativo, pondremos a consideración el proceso de fabricación particular de un switch cuya caracterización se realizó en el Centro Atómico Constituyentes de la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA) ¹. Se presentan características de un dispositivo SPST o “single pole – single throw” (circuito de una entrada y una sola salida).

La Tabla [2.1](#) muestra los procesos para el crecimiento de la membrana de oro y sus refuerzos en los empotramientos. Si bien la misma es de oro, está compuesta por una delgadísima capa de cromo para mejorar la adherencia, una delgadísima capa de oro depositada por “sputtering” y un crecimiento electrolítico de unos $2\mu\text{m}$. Además, las partes engrosadas de los empotramientos tienen un segundo crecimiento electrolítico de unos $3\mu\text{m}$ de espesor.

Como se ve en los pasos del proceso, la estructura está compuesta de dos materiales, y además formada por tres capas: una de cromo y dos de oro. Las dos de oro deberían tener idénticas propiedades mecánicas, y la influencia del cromo debería ser despreciable. Pero debido a los espesores involucrados y los efectos de la rugosidad, y la morfología de la estructura metálica granular proveniente de distintos métodos de fabricación, es sabido que las características de la membrana y sus anclajes no pueden asumirse análogas a las de una pieza de oro común, y de tamaño milimétrico. Para contrarrestar este punto podemos considerar como válidos para los análisis los parámetros que se midieron experimentalmente en películas de exactamente el mismo material y proceso.

Uno de los procesos de fabricación utilizados es el estandarizado en Trento, que es el que adoptan en CNEA. En la Figura [2.2](#) se muestra un esquema de la sección

¹<http://www.cnea.gov.ar/cac/>

#	Process Step	Description
1	Deposition	Deposition of Cr (10 nm)
2	Deposition	Deposition of Au (150 nm)
3	Lithography	Define Bridge, Positive resist $4\mu\text{m}$ thick, mask# BRIDGE
4	Deposition	Gold Electro-deposition ($1.3+\mu\text{m}$)
5	Ashing	Wet Strip Resist
6	Lithography	Define CPW Positive resist $5\mu\text{m}$ thick mask# CPW
7	Deposition	Gold Electro-deposition ($3.84+\mu\text{m}$)
8	Ashing	Wet Strip Resist
9	Wet Etch	Etch Au Seed layer
10	Wet Etch	Etch Chromium
11	Dry Etch	Chrome de-freckle, Timed <i>acqua regia</i>
12	Gold Sintering	Temp: 30°C , Time: 30 min, Gas: N ₂
13	Dicing	Coat wafers with $3\mu\text{m}$ thick resist. No hard bake, Pre-Dice Wafers ($+250\mu\text{m}$)
14	Ashing	Final Release

Tabla 2.1: Lista de los procesos de crecimiento de la membrana de oro y sus refuerzos en los empotramientos.

transversal del proceso, que incluye todas las características esenciales proporcionadas por el mismo. Podemos distinguir capas como puentes delgados de oro y capas gruesas (CPW¹ o CPW+PUENTE) del mismo material. También vemos resistencias de polisilicio y metálicas multicapas para líneas *underpass* y la línea de conexión de DC (con extensión limitada). El proceso también proporciona una capa delgada de oro expuesta a contactos metálicos que se puede utilizar como electrodo en voladizo.

2.3.2. Principios de Actuación

Los switch RF-MEMS poseen, como cualquier interruptor, dos estados estables. Para lograr el paso de uno a otro, se necesita algún mecanismo de actuación, dependiendo de la configuración del circuito al cual pertenece.

Así, tenemos mecanismos de **actuación térmica**, que se logra a través de una resistencia integrada sometida a una corriente AC. Al producirse un gradiente de tem-

¹CPW o guía coplanar: línea de transmisión de RF en la que todos los conductores que la componen están contenidos en un único plano. Es una guía de ondas que visualmente presenta una línea metálica angosta entre dos áreas metálicas amplias dispuestas, que forman los planos de tierra. Las distancias están diseñadas y ajustadas para minimizar pérdidas y ajustar la impedancia de la guía.

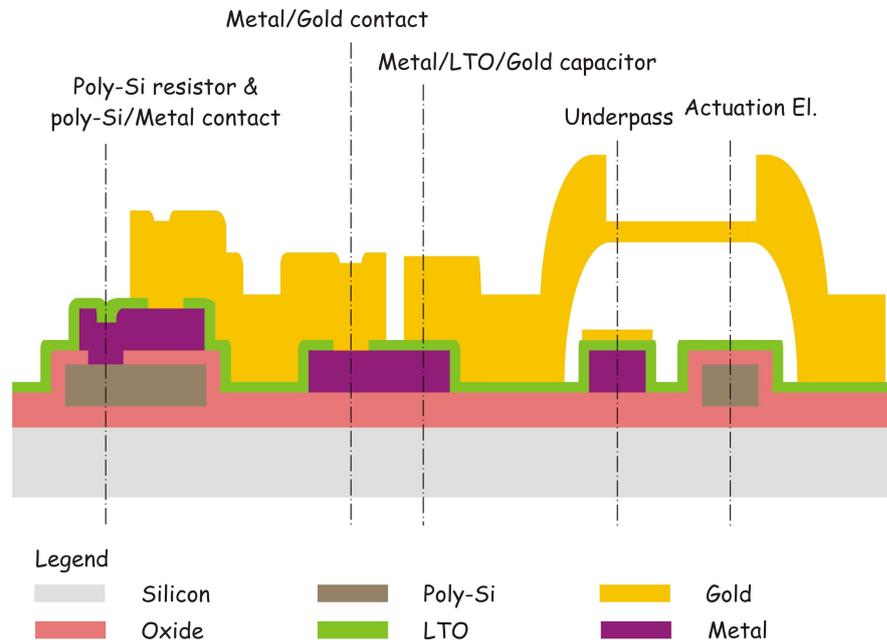


Figura 2.2: Esquema de la sección transversal del proceso de fabricación de un microswitch. Figura proporcionada por la CNEA.

peratura, el material se expande y la parte móvil del dispositivo se deforma. Ejemplos de dispositivos actuados térmicamente son los cantilevers de prueba que se utilizan en las proximidades de dispositivos más complejos para estimar las tensiones residuales. Como ejemplo de aplicación, se elaboró un modelo numérico por Elementos Finitos 3D, obteniendo resultados muy satisfactorios, reproduciendo los valores experimentales para la deflexión de las vigas cantilever. El objetivo de estos modelos fue simplemente la familiarización del tesista con el Software utilizado. Los resultados obtenidos se compararon con mediciones experimentales de la CNEA del Centro Atómico Constituyentes (ver Figura 2.4). Estos datos del perfil de deflexión fueron relevados por microscopía electrónica y posterior postprocesamiento.

Hay otros principios de actuación, entre los más importantes se destacan las actuaciones piezoeléctrica, piezoresistiva, electromagnética y electrostática. Se describirá más detalladamente esta última, por ser el principio de actuación que se presenta en los modelos que se estudiarán más adelante. Para ver detalles de los otros principios, podemos ver, por ejemplo, [Narducci Marín \(2010\)](#); [De Los Santos et al. \(2004a\)](#).

En el **principio de actuación electrostático**, la estructura se somete a un potencial eléctrico. Por lo general, se forma un capacitor entre electrodos. Uno puede ser la

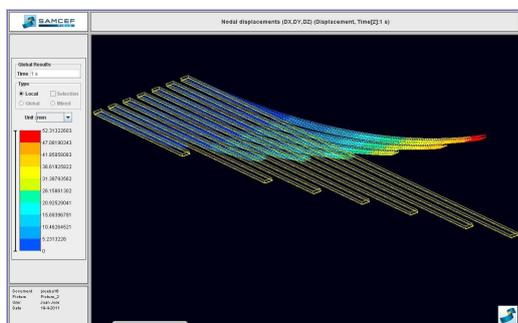


Figura 2.3: Visualización de las vigas cantilevers modeladas en SAMCEF Field.

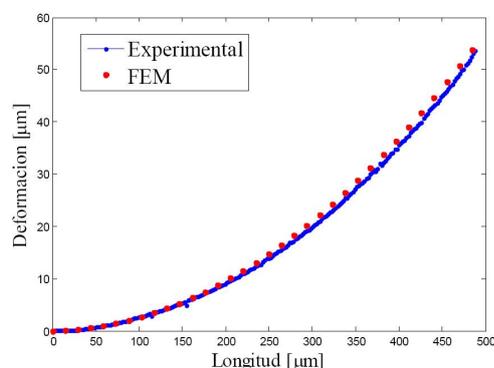


Figura 2.4: Resultados experimentales (en línea continua con puntos azul) y datos de simulación (puntos rojos).

misma estructura móvil (si es fabricado de un material conductor) y el otro una placa fija sobre la línea de señal de RF (ver por ejemplo, Figura 2.5). Cuando el switch se encuentra en ON, la parte flexible del dispositivo se encuentra en voladizo, la capacitancia es baja (del orden de los pF) y la señal de RF pasa libremente. Por otro lado, cuando se aplica un potencial DC, el puente flexible baja (estado OFF), generando un incremento en la capacitancia y una interrupción de la señal RF. El electrodo inferior al cual la placa colapsa, por lo general, es aislado mediante un material dieléctrico, evitando que la parte flexible entre en contacto óhmico con la línea de señal.

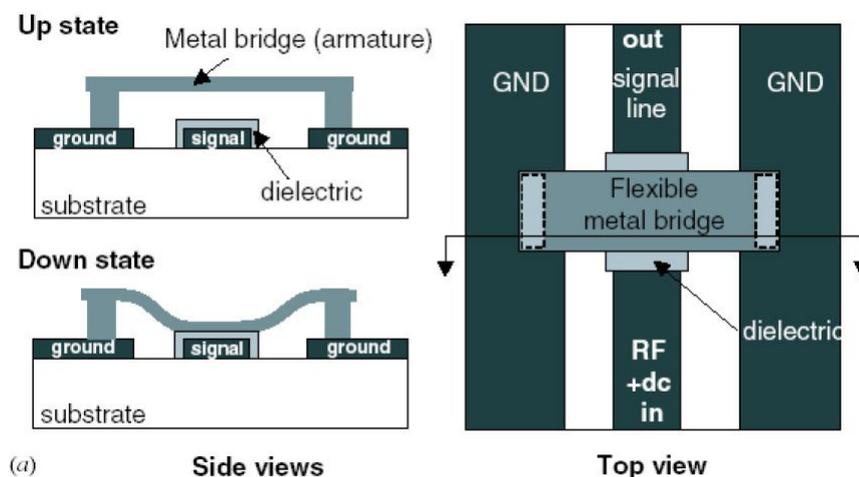


Figura 2.5: Esquema de un switch de derivación capacitiva actuado electrostáticamente. Figura extraída de la tesis de Rochus (2006).

2.4. Amortiguamiento

Por amortiguamiento se hace referencia a la disipación de energía en un sistema mecánico. Existen muchos mecanismos de disipación de energía, como por ejemplo, el calentamiento de un metal bajo deformación mecánica constante o la radiación de sonido cuando una placa estructural es golpeada.

En microinterruptores, el principal mecanismo de amortiguamiento es debido al aire que rodea al dispositivo. En la macro-escala solemos despreciar los efectos del aire, pero para micro-dispositivos se vuelve un factor importante en la interacción con las partes móviles. En el Capítulo 3 se describe bien este fenómeno. También podemos identificar otro tipo de mecanismos de amortiguamiento, según la naturaleza del dispositivo, como pueden ser el piezoeléctrico y por las estructuras de empotramiento propias del proceso de fabricación.

2.4.1. Presencia de perforaciones

En los dispositivos MEMS, podemos ver que muchos poseen perforaciones provenientes del proceso de fabricación. Éstas se realizan con el objetivo de remover uniformemente la capa de sacrificio que se deposita sobre el sustrato o placa fija. Sobre esta capa se depositará el material de la parte móvil que quedará en voladizo al remover el material de sacrificio. Esa remoción se lleva a cabo en algunos casos por ataques de ácidos. Si la placa superior no tuviera perforaciones, el ácido removería solamente por los lados laterales libres de la placa, sometiendo a la estructura a un ataque de ácido innecesario mientras llega al centro de la placa para remover todo el material. Por ello, resulta práctico realizar perforaciones en la placa superior, de manera tal que el ácido aplicado acceda por esas perforaciones al material en cuestión.

Esto tiene su contrapartida si se desea que el dispositivo se amortigüe, por ejemplo, en los interruptores. Cuando el potencial de actuación se reduce para llevarlo al estado de OFF, el dispositivo se libera, y la parte móvil se restituye al estado de equilibrio. En este caso es necesario reducir el tiempo de oscilación que comienza en la liberación y finaliza una vez alcanzado el equilibrio. Por lo tanto es necesario lograr el mayor amortiguamiento sobre la estructura y como mencionamos, el que produce el aire es uno de los principales.

Por otro lado, si se necesita que el dispositivo no se amortigüe demasiado, por ejemplo, en microresonadores utilizados como sensores de masa para caracterizar materiales a partir de las frecuencias de resonancia del dispositivo, las perforaciones nos ayudan a reducir el amortiguamiento debido al aire confinado entre las placas (flujo de estrujamiento o *squeeze flow*).

2.5. Consideraciones finales y motivaciones

Vimos en este capítulo la naturaleza multifísica del problema, por lo que resulta necesario encontrar un modelo que pueda representar los campos actuantes en el funcionamiento de los dispositivos MEMS (particularmente los switch RF-MEMS). Por lo tanto, asumimos como objetivo de esta tesis el desarrollo de un modelo que pueda representar el fenómeno de estrujamiento debido al fluido confinado entre placas paralelas, y acoplar la presencia de perforaciones presentes en un gran número de dispositivos.

Para ello, como se describió en la Introducción, se describirá en detalle el estrujamiento (Capítulo 3) para luego, en los capítulos siguientes (Capítulos 4 y 5) describir el modelo completo realizado por el método de los elementos finitos.

En cuanto a la naturaleza multifísica del problema, se aplicará el modelo a diferentes ejemplos para mostrar la interacción de diferentes campos involucrados.

Capítulo 3

Amortiguamiento viscoso: flujo de estrujamiento (*squeeze flow*)

3.1. Introducción

Así como tenemos el problema de tensiones residuales que se generan en el proceso de fabricación, también, durante el funcionamiento de los resonadores surge el problema de amortiguamiento del movimiento de la placa móvil. [Lepage \(2006\)](#) habla de la importancia de fabricar resonadores con un alto *factor de calidad* Q , donde Q se define como la razón entre la energía almacenada W en el resonador y la energía total disipada por ciclo de vibración ΔW . Comprender los mecanismos de disipación de energía en estos resonadores de alto Q es una cuestión importante para optimizar su diseño y desempeño. Los mecanismos de pérdida pueden clasificarse dentro de dos categorías:

- las pérdidas extrínsecas, que pueden ser alteradas por cambios en el diseño o condiciones de operación de los MEMS. El amortiguamiento del aire y las pérdidas por soporte contribuyen principalmente a las pérdidas externas.
- las pérdidas intrínsecas, que impone un límite superior al factor de calidad alcanzable. Amortiguamiento termo-elástico y pérdidas internas tales como las pérdidas intergranulares son ejemplos comunes de pérdidas intrínsecas.

Generalmente, el efecto de amortiguamiento debido al aire en sistemas macroscópicos es despreciable. Sin embargo, en MEMS el movimiento de micro-partes puede ser

afectado significativamente por el gas que lo rodea. El amortiguamiento del aire (en adelante *air damping* o también llamado *gas damping*), es una de las más importantes pérdidas de energía en MEMS. Dependiendo del nivel de presión, se pueden identificar tres regiones diferentes de *air damping* (Newell, 1968):

- región de *damping* intrínseca: en esta región, la presión es cercana al vacío y el *air damping* es despreciable;
- región molecular: el *damping* es causado por colisiones independientes de moléculas de aire que no interactúan con la superficie vibrante del resonador;
- región viscosa: el aire actúa como un fluido viscoso.

Este capítulo describe esta última región, analizando el fenómeno de *squeeze*, las ecuaciones que gobiernan este problema, presentando soluciones analíticas del campo de presiones para geometrías simples en condiciones ideales. Hacia el final del capítulo se muestran resultados del modelo de *squeeze* implementado en (Gomez Barroso et al. 2009) para una placa rectangular, bajo un análisis armónico.

3.2. Fenómeno de *squeeze*

Para geometrías simples, existen modelos analíticos que cuantifican el amortiguamiento viscoso. En MEMS se identifican tres tipos principales:

1. En el caso de resonadores de aire, sin otros componentes sólidos en su cercanía, el amortiguamiento se debe al flujo de aire en torno la barra vibrante (Berli y Cardona, 2009).
2. En el caso dos placas que se mueven paralelas una de otra, la fuerza de amortiguamiento aparece debido al flujo tipo Couette del aire entre las placas (Ye et al., 2003).
3. El tercer caso es el que consideramos principalmente en este trabajo, y tiene lugar cuando una placa vibra fuera del plano, sobre otra placa paralela y fija. Debido al desplazamiento de la placa vibrante, la presión del gas confinado varía, y el gas es sistemáticamente expulsado y aspirado del espacio entre las placas. La compresión del gas contribuye con un efecto elástico, mientras que el arrastre viscoso del aire durante el flujo, crea una fuerza mecánica disipativa sobre la placa, la cual amortigua el movimiento. Este mecanismo es dominado amortiguamiento por estrujamiento de película de fluido o *squeeze-film damping* (Bao y Yang, 2007).

Para entender la física de este último caso, consideramos a la microplaca vibrante como un sistema equivalente masa-resorte-amortiguador bajo excitación armónica (Go-[mez Barroso et al., 2009](#)). La deflexión en la dirección normal a la placa en un punto se determina resolviendo la ecuación de equilibrio dinámico del sistema mecánico:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial u}{\partial t} + k_s u = f_{\text{drive}} + f_{\text{fluid}} \quad (3.1)$$

donde m es la masa de la parte oscilante, c_s es el coeficiente de amortiguamiento estructural y k_s la constante de resorte de la estructura. En el lado derecho de la ecuación, f_{drive} representa la fuerza externa de excitación y f_{fluid} la fuerza de amortiguamiento que ejerce el aire o gas que se encuentra confinado entre la parte móvil y la parte fija (sustrato). En este último término, podemos distinguir una componente en fase con la velocidad debida al efecto viscoso, que contribuye con el amortiguamiento, y otra componente debida a la compresión del gas (efecto elástico) en fase con el desplazamiento, que produce un corrimiento en la frecuencia de resonancia.

Si queremos determinar la fuerza debida al fluido confinado, es indispensable determinar el campo de presiones y desplazamientos de la parte móvil. Para ello, se realiza un análisis del problema fluidodinámico, para acoplarlo al problema estructural elástico-dinámico.

3.3. Ecuación de Reynolds

Para obtener los campos de velocidad del fluido y la presión alrededor de la placa móvil, debemos resolver las Ecuaciones de Navier-Stokes con las condiciones de contorno apropiadas. En el caso particular del flujo *squeeze*, podemos considerar un fluido isotérmico y compresible. Bajo estas condiciones, las Ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la conocida Ecuación de Reynolds no-lineal ([White, 1974](#)) para el campo de presiones de un flujo 2D debido al movimiento de una placa móvil en dirección normal a otra fija (sustrato) (ver Fig. [3.1](#)).

Dado entonces un fluido de viscosidad μ confinado entre una placa móvil y el sustrato, y considerando que no actúan fuerzas externas (generalmente, en dispositivos MEMS las fuerzas debido a la gravedad son despreciables), tenemos la siguiente ecua-

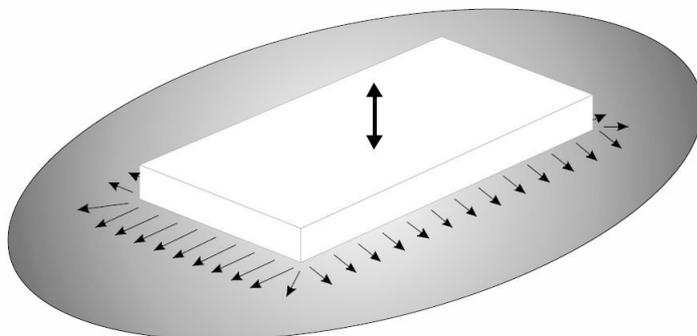


Figura 3.1: Placa móvil con desplazamiento normal al sustrato. Los vectores simples simbolizan al fluido, y el vector doble, el movimiento normal de la placa.

ción diferencial (Bao, 2005):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad (3.2)$$

donde $P = p_0 + p$ y $h = h_0 + z$, siendo P la presión sobre la placa móvil, p_0 la presión ambiente, h_0 la distancia de equilibrio entre las dos placas (*gap*) y z el desplazamiento de la placa móvil en la dirección vertical.

La Ecuación (3.2) es válida si el sistema cumple las siguientes condiciones:

- (i) el flujo es laminar y completamente desarrollado,
- (ii) la presión no varía en la dirección vertical,
- (iii) no hay resbalamiento del fluido en las paredes.

La primera condición se cumple cuando tenemos bajo número de Reynolds, es decir, efectos inerciales despreciables en comparación de los efectos viscosos. En el caso del flujo *squeeze* en relación a la placa vibrante, el número de Reynolds se define como $Re = \omega h_0^2 \rho / \mu$, donde ω es la frecuencia angular de oscilación de la placa. Por lo tanto, también se requiere un *gap* h_0 pequeño respecto de las dimensiones de la placa, por lo que podemos depreciar efectos de borde. Más adelante mostraremos cómo considerar dichos efectos cuando el *gap* es comparable a las dimensiones de la placa. La segunda condición se traduce en pequeñas amplitudes de desplazamiento en la dirección vertical, respecto de h_0 ($z \ll h_0$). Finalmente, la tercera condición implica un bajo número de Knudsen ($Kn = \lambda/h_0$, donde λ es el camino libre medio entre las partículas del fluido). En este último sentido, podemos diferenciar tres casos. Si $Kn < 0.001$ (Gad-el-

(Hak, 1999; Berli y Cardona, 2009) se resuelve la Ec. (3.2) con condiciones de contorno de no resbalamiento del fluido. Si $0.001 < Kn < 0.1$, la Ec. (3.2) es válida, pero se debe incluir una condición de borde de resbalamiento o *slip* ($v_{\text{en la pared}} = \lambda dv/dx$) que produce un término que se puede interpretar como una viscosidad efectiva μ_{eff} dependiente de Kn (Bao y Yang, 2007; Veijola et al., 1995). En el tercer caso, para $Kn > 0.1$, tenemos una región de flujo de transición hacia el flujo molecular libre donde se requieren aproximaciones estadísticas. Las dimensiones que obtenemos en los dispositivos MEMS corresponden al segundo caso, y como veremos más adelante, en presencia de perforaciones, el resbalamiento del fluido en contacto con las paredes de la perforación, Kn (y por tanto, la viscosidad efectiva) depende del tamaño de dicha perforación.

3.3.1. Derivación de la Ecuación de Reynolds a partir de Navier-Stokes

A continuación, se muestra una derivación detallada de la Ecuación de Reynolds, a partir de la Ecuación de Navier-Stokes, teniendo en cuenta ciertas condiciones del sistema, las cuales mencionamos anteriormente (Chipot y Luskin, 1987).

Consideremos las placas como superficies en \mathbb{R}^3 definidas sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Así, representamos la superficie superior como:

$$\{ (x, y, h_2(x, y, t)) / (x, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R} \} \quad (3.3)$$

y la superficie inferior como

$$\{ (x, y, h_1(x, y, t)) / (x, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R} \} \quad (3.4)$$

Supongamos que ambas se mueven con velocidades

$$\mathbf{V}_2 = (V_{2,1}, V_{2,2}, 0), \quad \mathbf{V}_1 = (V_{1,1}, V_{1,2}, 0) \quad (3.5)$$

respectivamente. Luego, tenemos $h = h_2 - h_1$ y definimos la velocidad relativa entre las placas como $V_j = V_{1,j} - V_{2,j}$ para $j = 1, 2$.

Teniendo en cuenta el fluido confinado, planteando conservación de masa obtenemos

la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ es el vector velocidad del fluido.

Por otro lado, la conservación de la cantidad de movimiento para un sistema isotérmico y de fluido compresible, se expresa a través de la Ecuación de Navier-Stokes como sigue:

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) \right) \quad (3.7)$$

Suponiendo que la presión no varía en la dirección normal a la placa ($p = p(x, y, t)$), que los efectos inerciales son despreciables (es decir, que predomina el efecto viscoso), la Ec. (3.7) se reduce las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \quad (3.9)$$

Despreciando las fuerzas externas debidas a la gravedad (por las pequeñas dimensiones consideradas) y considerando que si bien las velocidades u y v cambian en la direcciones paralelas a la placas, lo hacen en magnitud pero manteniendo el mismo tipo de perfil correspondiente al de un flujo laminar completamente desarrollado, manteniendo la velocidad vertical w nula, el sistema se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

para $h_1(x, y, t) < z < h_2(x, y, t)$.

Las ecuaciones (3.6) y (3.10) representan la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento respectivamente del fluido confinado entre las placas.

Si se integra la Ec. (3.6) en la variable z entre las superficies h_1 y h_2 , obtenemos del lado izquierdo

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} \rho dz - \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial h_j}{\partial t} \rho(x, y, h_j(x, y, t), t), \quad (3.11)$$

mientras que del lado derecho quedan:

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} (\rho u) dz - \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{\partial h_j}{\partial x} \right] [(\rho u)(x, y, h_j(x, y, t), t)] , \quad (3.12)$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} (\rho v) dz - \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{\partial h_j}{\partial y} \right] [(\rho v)(x, y, h_j(x, y, t), t)] , \quad (3.13)$$

y

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz = \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\rho w)(x, y, h_j(x, y, t), t) . \quad (3.14)$$

Usando la condición de contorno

$$w(x, y, h_j, t) = \frac{\partial h_j}{\partial t} + \frac{\partial h_j}{\partial x} u(x, y, h_j, t) + \frac{\partial h_j}{\partial y} v(x, y, h_j, t) \quad (3.15)$$

para $j = 1, 2$, se sigue de (3.11) - (3.15) que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} \rho v dz = 0 \quad (3.16)$$

Por otro lado, resolviendo la Ec. (3.10) en u y v con las condiciones de no deslizamiento dadas por:

$$\begin{aligned} u(x, y, h_1, t) &= V_{1,1} & u(x, y, h_2, t) &= V_{2,1} \\ v(x, y, h_1, t) &= V_{1,2} & v(x, y, h_2, t) &= V_{2,2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (z - h_1) - \frac{V_{1,1} - V_{2,1}}{h} \right) (z - h_2) + V_{2,1} \\ v(x, y, z, t) &= \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} (z - h_1) - \frac{V_{1,2} - V_{2,2}}{h} \right) (z - h_2) + V_{2,2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como estamos en el caso de un fluido compresible isotérmico, y suponiendo válida la ley de gases ideales, tenemos que $P/\rho = \text{constante}$, por lo que la densidad no depende

de la variable espacial z . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_{h_1}^{h_2} \rho u dz &= \rho \int_{h_1}^{h_2} u dz = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho h V_1}{2} \\ \int_{h_1}^{h_2} \rho v dz &= \rho \int_{h_1}^{h_2} v dz = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho h V_2}{2}\end{aligned}\tag{3.19}$$

Reemplazando (3.19) en (3.16) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h V_1}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h V_2}{2} \right) = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}\tag{3.20}$$

que es la ecuación de lubricación de Reynolds para una capa de fluido isotérmico y compresible de espesor h confinado entre dos placas que se mueven a una velocidad $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ relativa entre ellas (Bao y Yang, 2007; Chipot y Luskin, 1987). Teniendo en cuenta que en las estructuras MEMS adoptamos problemas en los cuales el movimiento lateral de las placas se considera despreciable ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$), y la condición antes mencionada de $P/\rho = \text{constante}$, de (3.20) obtenemos finalmente la Ec. (3.2).

En resumen, la ecuación de Reynolds se obtiene a partir de las ecuaciones de continuidad y balance de cantidad de movimiento (Ecuaciones de Navier Stokes) para un fluido compresible confinado entre dos cuerpos, bajo las suposiciones mencionadas al comienzo de esta sección, a saber: flujo laminar y completamente desarrollado; la presión invariante en la dirección vertical y condición de no resbalamiento del fluido en las paredes.

3.3.2. Soluciones analíticas para problemas simples

Si se tiene que $p \ll p_0$ y $z \ll h_0$, la Ec. (3.2) queda linealizada como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h_0^2} \left(\frac{1}{h_0} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t} \right).\tag{3.21}$$

Esta expresión es la base para diferentes soluciones analíticas. Para ello, consideremos el problema de una placa rectangular y un sistema de coordenadas cartesiano con el origen coincidente con el centro de la misma. La placa es de longitud L en la dirección

x y ancho W en la dirección y y se la somete a una *vibración armónica* de la forma:

$$z(x, t)/h_0 = \Phi(x) A e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

donde A es la amplitud normalizada y $\Phi(x)$ la forma de la deflexión de la placa, que varía sólo en la dirección x . El término $e^{i\omega t}$ describe el movimiento armónico de la placa en forma compleja, con una frecuencia de oscilación ω , siendo i la unidad compleja y t la variable del tiempo. La parte real de esta expresión se corresponde con el desplazamiento de la placa, mientras que su componente imaginaria se corresponde con la velocidad de la misma.

En [Darling et al. \(1998\)](#) se muestra el procedimiento para resolver la Ec. [\(3.21\)](#) a través del método de funciones de Green. Se observa que la ecuación linealizada de Reynolds tiene la forma de una ecuación lineal de difusión con un término fuente $\frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial z}{\partial t}$. El procedimiento considera cargas puntuales en puntos arbitrarios del dominio, y determina la difusión del término fuente encontrando la llamada Función de Green resolviendo una ecuación diferencial de segundo orden lineal. La solución de [\(3.21\)](#) se obtiene de integrar la Función de Green sobre todas las fuentes puntuales.

A continuación, se presentan las soluciones de la Ec. [\(3.21\)](#) sobre un dominio rectangular coincidente con la base de la placa considerando diferentes funciones de deflexión y condiciones de contorno para el campo de la presión.

Caso I: Placa rígida

Consideramos un desplazamiento vertical impuesto, y los contornos a presión ambiente p_0 como muestra la Figura [3.2](#). Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1 \\ p &= 0 \text{ en } x = \pm L/2 \text{ y } y = \pm W/2 \end{aligned}$$

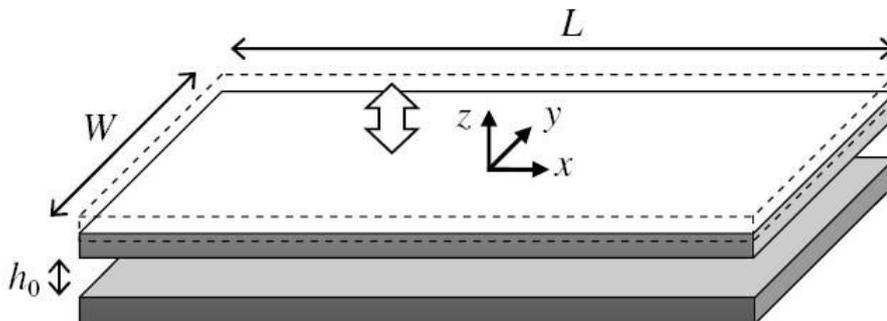


Figura 3.2: Caso I: Esquema de la placa rígida sometida a movimiento armónico vertical. Se muestra sistema de referencia usado.

La solución para el campo de presiones en este caso es (Darling et al., 1998):

$$p(x, y, t) = p_0 \sum_{n,m=\text{impar}} \frac{16(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn\pi^2} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_{mn}^2/\alpha^2} \right) \cos(k_m x) \cos(k_n y)$$

$$k_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{W^2} \quad ; \quad k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 \quad (3.23)$$

$$\alpha^2 = \frac{12\mu}{h_0^2 p_0}$$

Caso II: Placa flexible empotrada en extremos opuestos

En este caso, la placa se encuentra empotrada en los extremos $x = \pm L/2$ (ver Figura 3.3). Podemos considerar una aproximación de la deflexión (Pandey et al., 2007) de la forma:

$$\Phi(x) = (2/L)^4 (L/2 - x)^2 (L/2 + x)^2$$

y condiciones de contorno siguientes:

$$p = 0 \text{ en } y = \pm W/2 \quad ; \quad \partial p / \partial x = 0 \text{ en } x = \pm L/2.$$

Si analizamos detalladamente la deflexión de la placa, su expresión exacta es:

$$\Phi(x) = \cosh(\beta x/L) - \cos(\beta x/L) + \gamma [\sinh(\beta x/L) - \sin(\beta x/L)]$$

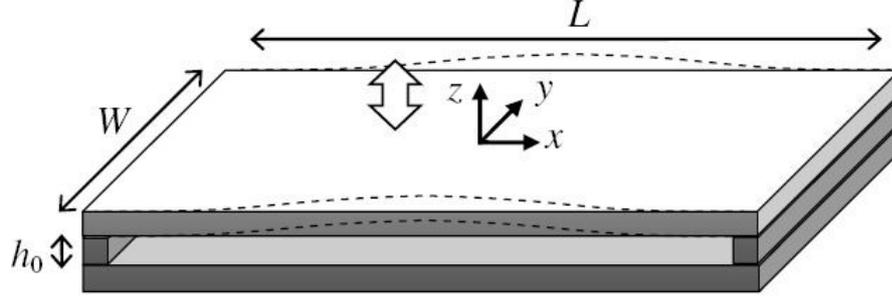


Figura 3.3: Caso II: Placa flexible con dos lados libres.

con $\beta = 4.73$ y $\gamma = -0.983$ para el primer modo de resonancia. El cálculo del campo de presiones en este caso involucra expresiones bastantes complejas para el cálculo (Zhang et al., 2004).

Usando la aproximación de la deflexión, Pandey et al. (2007) propone la solución estimada independiente de x siguiente:

$$p(x, y, t) = p_0 \sum_{n=\text{impar}} \frac{32(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{15n\pi} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_n^2/\alpha^2} \right) \cos(k_n y)$$

$$k_n^2 = d \frac{n^2 \pi^2}{W^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{12\mu}{h_0^2 p_0}$$
(3.24)

Por otro lado, con la misma deflexión, podemos resolver utilizando el método de Funciones de Green (Darling et al., 1998).

Podemos expresar la Ec. (3.21) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} - \alpha^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial t}$$
(3.25)

donde hemos normalizado la presión y el desplazamiento mediante $\tilde{p} = p/p_0$ y $H = z/h_0$ respectivamente, y α^2 se define como en (3.24). Considerando fuentes puntuales en puntos arbitrarios (x_0, y_0, t_0) , y un término de fuente $\rho(x_0, y_0, t_0)$ en esos puntos, la difusión debida a la excitación de esa fuente se determina a través de la función de

Green $G(x, y, t|x_0, y_0, t_0)$ resolviendo la siguiente Ecuación:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \alpha^2 \frac{\partial G}{\partial t} = -4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(t - t_0) \quad (3.26)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función Delta de Dirac.

En un punto arbitrario donde se encuentre una fuente puntual, podemos expresar (3.25) como:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y_0^2} - \alpha^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_0} = -4\pi\rho(x_0, y_0, t_0) = \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.27)$$

La solución de (3.27) se obtiene de integrar la función de Green sobre todas las fuentes puntuales que se encuentran dentro del dominio $S_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$p(x, y, t) = p_0 \int_0^t \int_{S_0} G(x, y, t|x_0, y_0, t_0) \rho(x_0, y_0, t_0) dx_0 dy_0 dt_0 \quad (3.28)$$

La función de Green $G(x, y, t|x_0, y_0, t_0)$ se obtiene por expansión de autofunciones u_{nm} con autovalores correspondientes k_{nm} no-degenerados, que se obtienen como soluciones de la Ecuación de Helmholtz (Darling et al., 1998):

$$\frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial y^2} + k_{nm}^2 \frac{\partial u_{nm}}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

En nuestro caso, tenemos la expresión de $H(x, y, t)$ de la Ec. (3.22), en la que consideramos la deflexión usada para obtener (3.24). Por lo tanto

$$\rho(x_0, y_0, t_0) = -\frac{\alpha^2}{4\pi} i\omega \Phi(x_0) A e^{i\omega t_0} \quad (3.30)$$

y

$$G(x, y, t|x_0, y_0, t_0) = \frac{4\pi}{\alpha^2} \sum_{n,m} e^{-\frac{k_{nm}^2}{\alpha^2}(t-t_0)} u_{nm}(x, y) u_{nm}(x_0, y_0) \quad (3.31)$$

En este caso, por las condiciones de contorno dadas, tenemos

$$u_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{LW}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \quad (3.32)$$

para $m = (0, 1, 2, \dots)$ y $n = (1, 2, 3, \dots)$; cos se usa para $m = \text{par}$ y $n = \text{impar}$ y sin se usa para $m = \text{impar}$ y $n = \text{par}$. Para el caso de $m = 0$, el factor de normalización es $\sqrt{2/LW}$.

Finalmente, resolviendo la integral (3.28), obtenemos:

$$\begin{aligned}
p(x, y, t) = & p_0 \sum_{n=\text{impar}} \left[\frac{32(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{15n\pi^2} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_n^2/\alpha^2} \right) \cos(k_n y) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=\text{par}} \frac{3072(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{nm^4\pi^5} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_{mn}^2/\alpha^2} \right) \cos(k_m x) \cos(k_n y) \right] \quad (3.33) \\
k_m^2 = & \frac{m^2\pi^2}{L^2} \quad ; \quad k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{W^2} \quad ; \quad k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 \\
\alpha^2 = & \frac{12\mu}{h_0^2 p_0}
\end{aligned}$$

Vemos que el primer término de la suma corresponde con la aproximación (3.24) propuesta por Pandey et al. (2007), por lo que la expresión completa (3.33) obtenida aquí representa con mejor aproximación la solución del problema.

Caso III: Placa flexible simplemente apoyada

Si consideramos el mismo caso anterior, pero ahora, en lugar de empotrar los extremos sólo los apoyamos, la deflexión se expresa como:

$$\Phi(x) = \cos(\pi x/L)$$

conservando las mismas condiciones de contorno

$$p = 0 \text{ en } y = \pm W/2 \quad ; \quad \partial p / \partial x = 0 \text{ en } x = \pm L/2.$$

Calculando el campo de presiones por medio de las funciones de Green como se describió en el caso anterior, se obtiene la siguiente expresión para el término fuente

$$\rho(x_0, y_0, t_0) = -\frac{\alpha^2}{4\pi} i\omega \cos\left(\frac{\pi x_0}{L}\right) A e^{i\omega t_0} \quad (3.34)$$

Reemplazando (3.34) y (3.31) con las mismas autofunciones (3.32) (determinadas por las condiciones de contorno) en (3.28) obtenemos:

$$\begin{aligned}
p(x, y, t) = & p_0 \sum_{n=\text{impar}} \left[\frac{8(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi^2} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_n^2/\alpha^2} \right) \cos(k_n y) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=\text{par}} \frac{16(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{(m^2-1)n\pi^2} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_{mn}^2/\alpha^2} \right) \cos(k_m x) \cos(k_n y) \right] \quad (3.35) \\
k_m^2 = & \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \quad ; \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{W^2} \quad ; \quad k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 \\
\alpha^2 = & \frac{12\mu}{h_0^2 p_0}
\end{aligned}$$

Caso IV: Placa flexible empotrada en un extremo (*cantilever*)

En este último caso, se considera una viga cantilever empotrada en uno de sus extremos. Se puede determinar la deflexión a partir del análisis de vibraciones libres. Resolviendo la ecuación de movimiento correspondiente (Rao, 2004), se obtiene la deflexión mediante la siguiente expresión:

$$\Phi(x) = \frac{1}{b_c} \left[\cosh\left(\frac{a_c x}{L}\right) - \cos\left(\frac{a_c x}{L}\right) + c_c \left(\sinh\left(\frac{a_c x}{L}\right) - \sin\left(\frac{a_c x}{L}\right) \right) \right]$$

donde $a_c = 1.875$ es el autovalor para el primer modo, $a_c = 4.694$ para el segundo modo y $a_c = 7.855$ para el tercero, $b_c = \cosh(a_c) - \cos(a_c) + c_c (\sinh(a_c) - \sin(a_c))$, y

$$c_c = -\frac{\cosh(a_c) + \cos(a_c)}{\sinh(a_c) + \sin(a_c)} \quad (\text{Pandey y Pratap, 2007}).$$

Las condiciones de contorno correspondientes a este caso son:

$$p = 0 \text{ en } y = \pm W/2 \text{ y } x = -L/2; \quad \partial p / \partial x = 0 \text{ en } x = L/2.$$

La solución, empleando funciones de Green que obtiene (Pandey y Pratap, 2007) es

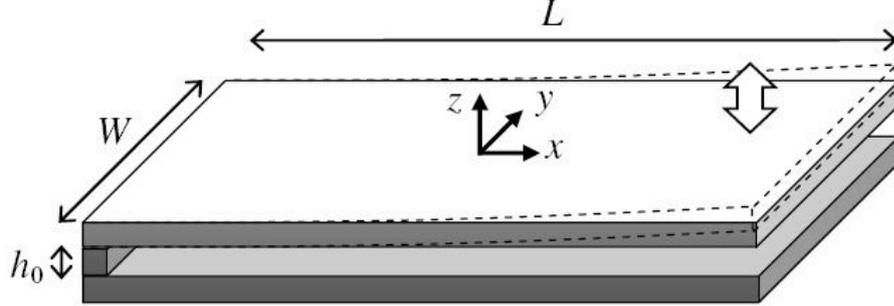


Figura 3.4: Caso III: Placa flexible empotrada en un extremo (*cantilever*).

la siguiente:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) &= p_0 \sum_{n,m=\text{impar}} \frac{16(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn\pi^2} \left(\frac{i\omega Ab_m e^{i\omega t}}{i\omega + \bar{k}_{mn}^2/\alpha^2} \right) \cos(k_m x) \cos(k_n y) \\
 k_m^2 &= \frac{m^2 \pi^2}{(2L)^2} \quad ; \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{W^2} \quad ; \quad \bar{k}_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2 \\
 \alpha^2 &= \frac{12\mu}{h_0^2 p_0} \\
 b_m &= \frac{1}{b_c} \left(\frac{-m\pi}{2(-1)^{\frac{m-1}{2}} (a_c^4 - m^4 \pi^4/16)} + \frac{m^2 \pi^2 (\cos(a_c) + c_c \sin(a_c))}{4(a_c^2 - m^2 \pi^2/4)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m^2 \pi^2 (\cosh(a_c) + c_c \sinh(a_c))}{4(a_c^2 + m^2 \pi^2/4)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.3.3. Fuerza de amortiguamiento sobre la microplaca

Recordando la Ec. (3.1), la fuerza ejercida por el fluido sobre la placa se obtiene de integrar la presión sobre el dominio en cuestión, es decir, sobre la superficie inferior de la placa. Las componentes elástica y viscosa de la fuerza f_{fluid} se obtienen de separar la parte real e imaginaria, logrando términos en fase con el desplazamiento y la velocidad, respectivamente. Considerando la parte real de $Ae^{i\omega t}$, es decir, $z(t) = h_0 A \cos(\omega t)$, se obtiene

$$f_{\text{fluid}}(t) = -k_e z(t) + c_v \frac{dz(t)}{dt} \tag{3.37}$$

donde k_e y c_v son los coeficientes elástico y viscoso respectivamente, utilizados para estimar el factor de calidad y el corrimiento en la frecuencia de resonancia. Entonces, para cada uno de los casos que se describieron anteriormente, se integra la expresión de la presión para obtener f_{fluid} y los coeficientes elástico y viscoso.

En las siguientes expresiones, $\chi = W/L$ corresponde a relación de aspecto de la placa, y $\sigma = 12\mu\omega W^2/p_0 h_0^2$ es el *número de squeeze* (Bao y Yang, 2007; Pratap et al., 2007), que caracteriza la importancia relativa de cada contribución a la fuerza.

Caso I:

$$f_{\text{fluid}}(t) = p_0 L W \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{64}{m^2 n^2 \pi^4} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_{mn}^2/\alpha^2} \right) \quad (3.38)$$

$$k_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2 p_0 L W}{\pi^8 h_0} \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{1}{(mn)^2 \left\{ [n^2 + (m\chi)^2]^2 + \sigma^2/\pi^4 \right\}} \quad (3.39)$$

$$c_v(\sigma) = \frac{64\sigma p_0 L W}{\pi^6 h_0 \omega} \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{n^2 + (m\chi)^2}{(mn)^2 \left\{ [n^2 + (m\chi)^2]^2 + \sigma^2/\pi^4 \right\}} \quad (3.40)$$

Caso II:

En este caso, se muestran las expresiones que se derivan de la Ec. (3.33), que corresponde a la presión calculada en forma exacta.

$$f_{\text{fluid}}(t) = p_0 L W \sum_{n=\text{impar}} \frac{64}{15n^2 \pi^2} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_n^2/\alpha^2} \right) \quad (3.41)$$

$$k_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2 p_0 L W}{15\pi^6 h_0} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n^2 (n^4 + \sigma^2/\pi^4)} \quad (3.42)$$

$$c_v(\sigma) = \frac{64\sigma p_0 L W}{15\pi^4 h_0 \omega} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n^4 + \sigma^2/\pi^4} \quad (3.43)$$

Caso III:

$$f_{\text{fluid}}(t) = p_0 LW \sum_{n=\text{impar}} \frac{16}{n^2 \pi^3} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_n^2/\alpha^2} \right) \quad (3.44)$$

$$k_e(\sigma) = \frac{16\sigma^2 p_0 LW}{\pi^7 h_0} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n^2 (n^4 + \sigma^2/\pi^4)} \quad (3.45)$$

$$c_v(\sigma) = \frac{16\sigma p_0 LW}{\pi^5 h_0 \omega} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n^4 + \sigma^2/\pi^4} \quad (3.46)$$

Caso IV:

$$f_{\text{fluid}}(t) = p_0 LW \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{64b_m^2}{m^2 n^2 \pi^4} \left(\frac{i\omega A e^{i\omega t}}{i\omega + k_{mn}^2/\alpha^2} \right) \quad (3.47)$$

$$k_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2 p_0 LW}{\pi^8 h_0} \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{b_m^2}{(mn)^2 \left\{ [n^2 + (m/2\chi)^2]^2 + \sigma^2/\pi^4 \right\}} \quad (3.48)$$

$$c_v(\sigma) = \frac{64\sigma p_0 LW}{\pi^6 h_0 \omega} \sum_{m,n=\text{impar}} \frac{[n^2 + (m/2\chi)^2] b_m^2}{(mn)^2 \left\{ [n^2 + (m/2\chi)^2]^2 + \sigma^2/\pi^4 \right\}} \quad (3.49)$$

Podemos concluir de las expresiones anteriores que, para bajas frecuencias, domina la componente viscosa, alcanzando un máximo y decreciendo finalmente a altas frecuencias. Por el contrario, la componente elástica de la fuerza, asociada a la compresibilidad del aire, crece con la frecuencia ω .

3.4. Análisis en frecuencia: Ejemplo de aplicación

Tomando como ejemplo el Caso I (placa rígida), podemos ver que el cruce de las componentes de la fuerza tiene lugar en $\sigma_c = \pi^2(1 + (W/L)^2)$. Básicamente, si $\sigma \ll \sigma_c$

($k_e \ll c_v$), la fuerza es puramente viscosa (efecto de *damping*); si $\sigma \gg \sigma_c$ ($k_e \gg c_v$), la fuerza es puramente elástica (efecto de *spring*); si $\sigma \approx \sigma_c$ la combinación de ambos efectos influye significativamente en la dinámica de la placa oscilante. Para una geometría dada, la frecuencia de corte es $\omega_c = \pi^2 p_0 h_0^2 (1 + 1/\chi^2) / 12\mu W^2$.

Partiendo de las Ecuaciones (3.39) y (3.40), tomando $\sigma \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$k_e \approx 0 \text{ y } c_v \propto \mu L \left(\frac{W}{h_0} \right)^3.$$

Esta última es la expresión del coeficiente de amortiguamiento para una placa rectangular delgada en movimiento rígido (viga de longitud L y ancho $W \ll L$) sometida a vibración armónica de pequeña amplitud, en ausencia de efectos de compresibilidad.

Estos resultados muestran que la relación W/h_0 es un parámetro clave para controlar el efecto de *squeeze film damping*. Es decir, obtener valores precisos de h_0 es fundamental para alcanzar cálculos confiables, principalmente porque h_0 es difícil de medir en forma directa desde el punto de vista experimental. Por ejemplo, la tolerancia de fabricación en MEMS se encuentra alrededor de $0.15\mu m$, por lo que, para un valor típico de *gap* en estos dispositivos ($h_0 \approx 2\mu m$) el error introducido por h_0^3 en el cálculo de f_{fluid} alcanza el 25%.

3.4.1. Aplicación y resultados para la placa rígida

Con el objetivo de ilustrar lo que se describió anteriormente, se muestran a continuación resultados obtenidos al implementar el modelo de Elementos Finitos que se describirá en el Capítulo 4 con detalle, como así también su validación.

Siguiendo con el ejemplo del Caso I, consideremos una placa rectangular con sus lados comparables $W = 2a$ y $L = 2b$ como se muestra en la Figura 3.5 (Gomez Barroso et al., 2009). Las condiciones de contorno para el problema de *squeeze film* son:

$$p(\pm a, y) = 0; \quad p(x, \pm b) = 0.$$

Supongamos que la placa oscila en la dirección vertical, con un movimiento impuesto rígido, y amplitud de oscilación pequeña. Las dimensiones de la placa son de longitud $L = 300\mu m$ y $W = 50\mu m$. La separación inicial de la placa respecto del sustrato

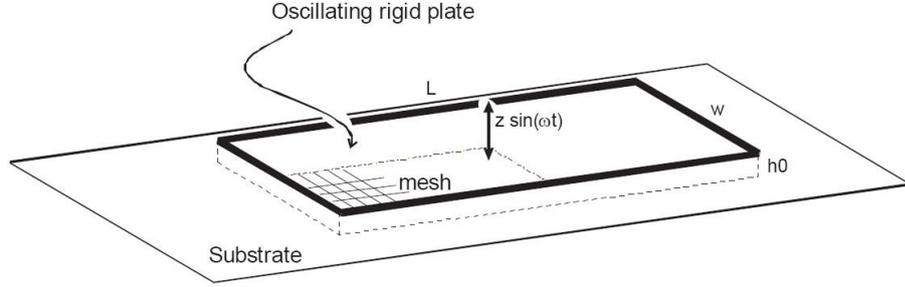


Figura 3.5: Caso I: Problema de placa rígida.

(posición de equilibrio) es $h_0 = 5\mu\text{m}$. Consideramos una presión atmosférica del aire de $p_0 = 1 \times 10^5 \text{N/m}^2$ y viscosidad $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$.

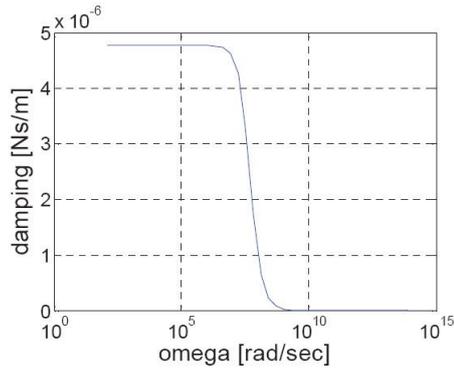


Figura 3.6: Caso I: Componente de *damping* del coeficiente de amortiguamiento.

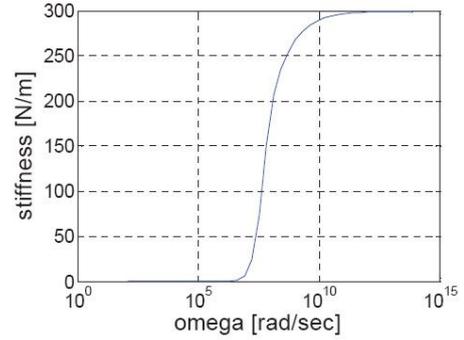


Figura 3.7: Caso I: Componente de *stiffness* del coeficiente de amortiguamiento.

Las Figuras [3.6](#) y [3.7](#) muestran las componentes real e imaginaria del coeficiente de amortiguamiento en función de la frecuencia de excitación. Podemos apreciar que para bajas frecuencias de excitación, el coeficiente de amortiguamiento está dominado por el efecto de *damping* mientras que para frecuencias altas, el comportamiento es prácticamente dominado por el efecto *stiffness*.

Si comparamos los valores límites obtenidos en la bibliografía ([Bao y Yang, 2007](#)), vemos que el coeficiente de la fuerza de amortiguamiento para $\omega \rightarrow 0$ se calcula como:

$$c_v = \mu L \left(\frac{W}{h_0} \right)^3 \beta(\chi) \quad (3.50)$$

donde $\beta(\chi) = 1 - 0.58\chi$. En este caso $c_v = 4.878 \times 10^{-6} \text{Ns/m}$. Por otro lado, cuando

$\omega \rightarrow \infty$, el coeficiente de la fuerza de damping es:

$$k_e = \frac{p_0 W L}{h_0} \quad (3.51)$$

que nos da en nuestro caso $k_e = 300N/m$. En ambos casos podemos observar que los valores obtenidos se corresponden con los de la bibliografía.

Capítulo 4

Método de Elementos Finitos en microplacas

4.1. Introducción

En el Capítulo [2](#) se describió que la disipación por el aire es uno de los efectos más importantes de amortiguamiento presentes en los dispositivos MEMS, principalmente en las micro-partes que se encuentran en voladizo. Asimismo, en el Capítulo [3](#) se muestra más detalladamente el fenómeno de *squeeze film air damping* y su influencia en el movimiento de las partes móviles de los dispositivos MEMS. En este capítulo, considerado central en esta tesis, se muestra el modelo numérico propuesto para simular el amortiguamiento viscoso (efecto *squeeze*) que se produce en placas móviles que se encuentran sobre otra fija (que generalmente es el sustrato del MEMS), debido al aire confinado entre las mismas.

4.2. Formulación diferencial del modelo

Recordando la Sección [3.3](#), la ecuación diferencial que describe el amortiguamiento viscoso en el problema es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad (4.1)$$

donde $P = p_0 + p$ y $h = h_0 + z$, siendo P la presión sobre la placa móvil, p_0 la presión ambiente, h_0 la distancia de equilibrio entre las dos partes (*gap*) y z el desplazamiento en la dirección vertical.

El dominio en que se resuelve la ecuación, como vimos, es coincidente con la cara inferior de la placa móvil. En dicha sección pudimos analizar diferentes casos para obtener soluciones analíticas dependiendo de la deflexión de la placa y de las condiciones de contorno impuestas. Todas estas soluciones corresponden a la linealización de la ecuación de Reynolds, en cambio aquí partiremos de la ecuación general no lineal que luego debilitaremos. Es decir, la formulación diferencial del modelo queda determinada por la Ecuación (4.1) más las condiciones de contorno impuestas, y de esta formulación partiremos para el desarrollo del modelo.

A continuación, se describe el modelo numérico del problema a través del Método de Elementos Finitos, analizando por un lado el equilibrio dinámico de la placa elástica (problema estructural) y por otro lado el equilibrio dinámico del fluido confinado (fluido compresible). Luego se muestra el sistema acoplado resultante (Gomez Barroso et al., 2009).

4.3. Modelo Numérico y Método de Elementos Finitos

En esta sección se utiliza la ecuación no lineal de Reynolds para capas delgadas de fluidos compresibles para determinar el campo de presiones del aire confinado, mientras que el modelo elástico lineal estándar se utiliza para calcular el campo de desplazamientos. La formulación discreta se basa en el Método de Elementos Finitos (Zienkiewicz y Taylor, 1991) para resolver tanto el campo de presiones como el de desplazamientos. Se establece un sistema de ecuaciones acopladas para el movimiento. En el caso de asumir oscilaciones armónicas, la matriz de amortiguamiento resultante depende de la frecuencia de oscilación.

4.3.1. Problema Estructural: Equilibrio dinámico de la placa elástica

Considerando la notación indicial o convenio de Einstein, sea σ_{ij} el tensor de tensiones de Cauchy y ϵ_{ij} el tensor de deformaciones infinitesimales, definido como la parte

simétrica del tensor gradiente de desplazamientos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.2)$$

donde u_i es la componente i -ésima del vector de desplazamientos.

Sea V el volumen de la placa móvil y $S_{tot} = \partial V$ su contorno. Planteando la ecuación de equilibrio dinámico para la placa, se obtiene la siguiente formulación diferencial:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = \rho_s \ddot{u}_j \quad \text{en } V \quad (4.3a)$$

$$\sigma_{ij} n_i = t_j \quad \text{sobre } S \quad (4.3b)$$

donde \mathbf{u} es el vector de desplazamiento mecánico; \mathbf{b} , el vector de las fuerzas de volumen aplicadas y \mathbf{t} , el vector de las tracciones de superficie.

Multiplicando por una función de *desplazamientos virtuales* δu_j en la Ec. (4.3a) e integrando sobre el volumen V tenemos:

$$- \int_V \delta u_j \sigma_{ij,i} dV + \int_V \delta u_j \rho_s \ddot{u}_j dV - \int_V \delta u_j b_j dV = 0 \quad (4.4)$$

Desarrollando la primer integral de (4.4) y aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$\begin{aligned} \int_V \delta u_j \sigma_{ij,i} dV &= \int_V (\delta u_j \sigma_{ij})_{,i} dV - \int_V \delta u_{j,i} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S_{tot}} \delta u_j \sigma_{ij} n_i dS - \int_V \delta u_{j,i} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{S_{tot}} \delta u_j t_j dS - \int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde en la última igualdad hemos usado la condición de contorno (4.3b) y el hecho de que el producto de un tensor simétrico por otro tensor (no necesariamente simétrico) es igual al producto del tensor simétrico por la parte simétrica del otro tensor.

Entonces, la formulación débil del problema del equilibrio dinámico de la placa queda:

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \int_V \delta u_j \rho_s \ddot{u}_j dV - \int_V \delta u_j b_j dV - \int_{S_{tot}} \delta u_j t_j dS = 0 \quad (4.6)$$

En esta expresión, el primer término representa la variación de la energía de deformación; el segundo la variación de la energía cinética. S_{tot} es la superficie total de la placa incluidas las caras superior e inferior de la placa.

Consideremos la geometría particular del Caso I (ver Fig. 3.5), las fuerzas de tracción aplicadas se definen en las caras superior e inferior de la placa como sigue:

$$\mathbf{t}_{sup} = -\mathbf{n}_{sup} P_{sup}, \quad \mathbf{t}_{inf} = -\mathbf{n}_{inf} P_{inf} \quad (4.7)$$

y las fuerzas de cuerpo aplicadas se consideran despreciables (debido a las pequeñas dimensiones) $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Los vectores \mathbf{n}_{sup} and \mathbf{n}_{inf} son las normales hacia afuera de la superficie de la placa y se cumple:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{n}_{sup} = -\mathbf{u}^T \mathbf{n}_{inf} = \mathbf{u}^T \mathbf{n}. \quad (4.8)$$

Suponiendo que la presión sobre la cara superior de la placa es constante

$$P_{sup} = p_0, \quad P_{inf} = p_0 + p, \quad (4.9)$$

por lo tanto, la contribución de las cargas superficiales pueden representarse por una integral simple de superficie

$$-\int_{S_{tot}} \delta u_j t_j dS = \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{n} (P_{sup} - P_{inf}) dS = -\int_S \mathbf{u}^T \mathbf{n} p dS. \quad (4.10)$$

donde hemos llamado S a la superficie inferior de la placa.

La variación de la energía de deformación se puede expresar con respecto a los vectores 6×1 de deformación y tensión $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ (notación de Voigt):

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (4.11)$$

Más aún, si sólo consideramos la contribución vertical del desplazamiento en la energía cinética, la Ec. (4.6) toma la forma:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho_s \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{n} p dS = 0. \quad (4.12)$$

Consideremos las siguientes fórmulas de interpolación:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{Q}(x, y, z)\mathbf{q}(t), \quad p(x, y, z, t) = \mathbf{R}(x, y, z)\mathbf{p}(t), \quad (4.13)$$

donde $\mathbf{q} = [\mathbf{u}_1^T \dots \mathbf{u}_N^T]^T$ es el vector $n \times 1$ de desplazamientos nodales ($n = 3N$), $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_m]^T$ es el vector $m \times 1$ de las presiones nodales, y \mathbf{Q} (resp. \mathbf{R}) es una matriz $3 \times n$ (resp. $1 \times m$) de funciones de interpolación.

Usando la relación deformación-desplazamiento

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (4.14)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de interpolación de deformaciones, y la relación constitutiva (Ley de Hooke generalizada)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (4.15)$$

siendo \mathbf{C} el tensor de segundo orden que representa al tensor de coeficientes elásticos de cuarto orden, la forma débil (4.12) se puede expresar como:

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\mathbf{p}) = 0 \quad (4.16)$$

donde las matrices de masa \mathbf{M} , de rigidez \mathbf{K} y de acoplamiento \mathbf{G} se definen como:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho_s \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} dV, \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{G} = \int_S \mathbf{Q}^T \mathbf{n} \mathbf{R} dS. \quad (4.17)$$

4.3.2. Problema fluido dinámico: Equilibrio dinámico de la capa de fluido compresible

El fluido confinado entre la placa móvil y flexible y el soporte (puede ser el sustrato) se puede modelar, como vimos en el Capítulo 3 con la Ecuación de Reynolds no lineal (4.1) bajo condiciones isotérmicas (Bao y Yang, 2007; Nayfeh y Younis, 2004; Pandey y Pratap, 2007; Zhang et al., 2004).

A modo de ejemplo, sin perder generalidad, consideremos el Caso II, para introducir algunas condiciones de contorno. Claramente, cambiando estas condiciones, podemos elegir funciones de forma para la interpolación que salven estas diferencias.

Suponiendo una placa rectangular de ancho b en la dirección x y longitud l en la dirección y , las condiciones de contorno, entonces son:

$$p(0, y, t) = p(b, y, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial p}{\partial y}(x, l, t) = 0. \quad (4.18)$$

La forma débil queda expresada como:

$$\begin{aligned} & \int_S \delta p \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial(hp)}{\partial t} \right) dS \\ & + \int_0^b \delta p \left[\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=0} dx - \int_0^b \delta p \left[\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=l} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde S se considera coincidente con la superficie inferior de la placa. Integrando por partes, se obtiene

$$\int_S \frac{Ph^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_S \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + P \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS = 0. \quad (4.20)$$

Usando

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{u}} \quad (4.21)$$

y las fórmulas de interpolación (4.13), la expresión (4.20) después de la normalización queda,

$$\delta \mathbf{p}^T (\mathbf{E} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad (4.22)$$

donde las matrices $\mathbf{E}(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}(\mathbf{p})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ se calculan por medio de

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{q}) &= \int_S \frac{h}{p_0} \mathbf{R}^T \mathbf{R} dS, \quad \mathbf{H}(\mathbf{p}) = \int_S \frac{P}{p_0} \mathbf{R}^T \mathbf{n}^T \mathbf{Q} dS, \\ \mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \int_S \frac{Ph^3}{12\mu p_0} (\mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_y) dS. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.3.3. Sistema final acoplado

De las expresiones finales de las secciones anteriores y suponiendo una contribución de amortiguamiento estructural, las ecuaciones de movimiento acopladas de la placa

obtenidas por el método de elementos finitos quedan:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\mathbf{p} + \mathbf{H}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

que se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

En el caso particular en que consideramos $z \ll h_0$ y $p \ll p_0$, las matrices \mathbf{E} , \mathbf{A} y \mathbf{H} se vuelven constantes, el modelo se convierte en lineal y tenemos $\mathbf{H} = \mathbf{G}^T$.

Si consideramos un comportamiento armónico del sistema, obtenemos de (4.25)

$$\mathbf{p}(s) = -(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{H} s \mathbf{q}(s) \quad (4.27)$$

con s , la variable de Laplace. Entonces, en la ecuación estructural (4.24) nos queda:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D}(s) + \mathbf{K})\mathbf{q}(s) = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de amortiguamiento dependiente de la frecuencia definida como

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{G}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}. \quad (4.29)$$

Para frecuencias muy bajas, cuando $s \rightarrow 0$, la contribución por el flujo de escurrimiento resulta puramente de amortiguamiento:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{D}(s) = \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H} \quad (4.30)$$

Por otro lado, en el límite de altas frecuencias, cuando $s \rightarrow \infty$, esta contribución resulta puramente de rigidez:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{D}(s) = \frac{1}{s}\mathbf{G}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} \quad (4.31)$$

pudiendo observar que el efecto de *squeeze film* induce una rigidización de la microestructura.

4.4. Implementación

La implementación del modelo obtenido se realiza utilizando el software *Oofelie* como solver, en el cual se desarrollan los programas del modelo.

Oofelie (Object Oriented Finite Element Led by Interactive Executer) es un software desarrollado en el lenguaje C++, que permite la resolución de problemas multifísicos. La plataforma existente en Elementos Finitos (FEM) y Elementos de Contorno (BEM) permite una fácil incorporación de nuevos elementos en la implementación.

Oofelie tiene su propio intérprete de línea de comandos que permite al usuario describir su problema en un archivo de texto ASCII. La extensión de los archivos de Oofelie es “.e”. En ellos se puede describir un esquema de resolución adaptado al problema a modelar (esquema de resolución interpretado). El intérprete de línea de comandos (CLI) permite, por lo tanto, introducir datos y métodos para trabajar con ellos.

Para modelar los problemas, se desarrolla primero la geometría usando el software *Samcef Field* (<http://www.lmsintl.com/samcef-field>) de la firma *Samtech*, el cual generará, una vez terminado el modelo con sus mallas respectivas, un archivo “.e” para que *Oofelie* lo interprete y resuelva. Posteriormente se exportan los resultados obtenidos para su visualización y postprocesamiento nuevamente a *Samcef Field*.

Para validar el modelo, se muestra a continuación el ejemplo del Caso I utilizado en la Sección [3.4](#)

En la Figura [4.1](#) vemos el campo de presiones (arriba) obtenido por la simulación. Podemos observar que el modelo entrega resultados comparables a los de la solución analítica, validando así las expresiones desarrolladas y el programa.

Considerando el Caso II. Modelamos una placa doblemente empotrada. Para visualizar la deflexión vemos la Fig. [4.2](#), donde se modela un cuarto de la placa por razones de simetría.

Con el objetivo de ilustrar otros datos que podemos obtener del modelo, en la Fig. [4.3](#) mostramos el desplazamiento del punto central de la placa en función de la frecuencia. A través de esta gráfica, podemos estimar el factor de calidad de la placa, calculado como:

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f} \quad (4.32)$$

donde f_c es la frecuencia de resonancia (en el pico de la curva) y Δf el *ancho de banda* correspondiente al ancho del intervalo de frecuencia a 3dB, o, lo que es lo mismo, el intervalo definido por las frecuencias tales que el desplazamiento sea $1/\sqrt{2}$ veces el desplazamiento máximo (pico) (por ejemplo, [De Pasquale et al., 2010](#)). De la Fig. [4.3](#), podemos estimar un factor de calidad $Q \approx 2$.

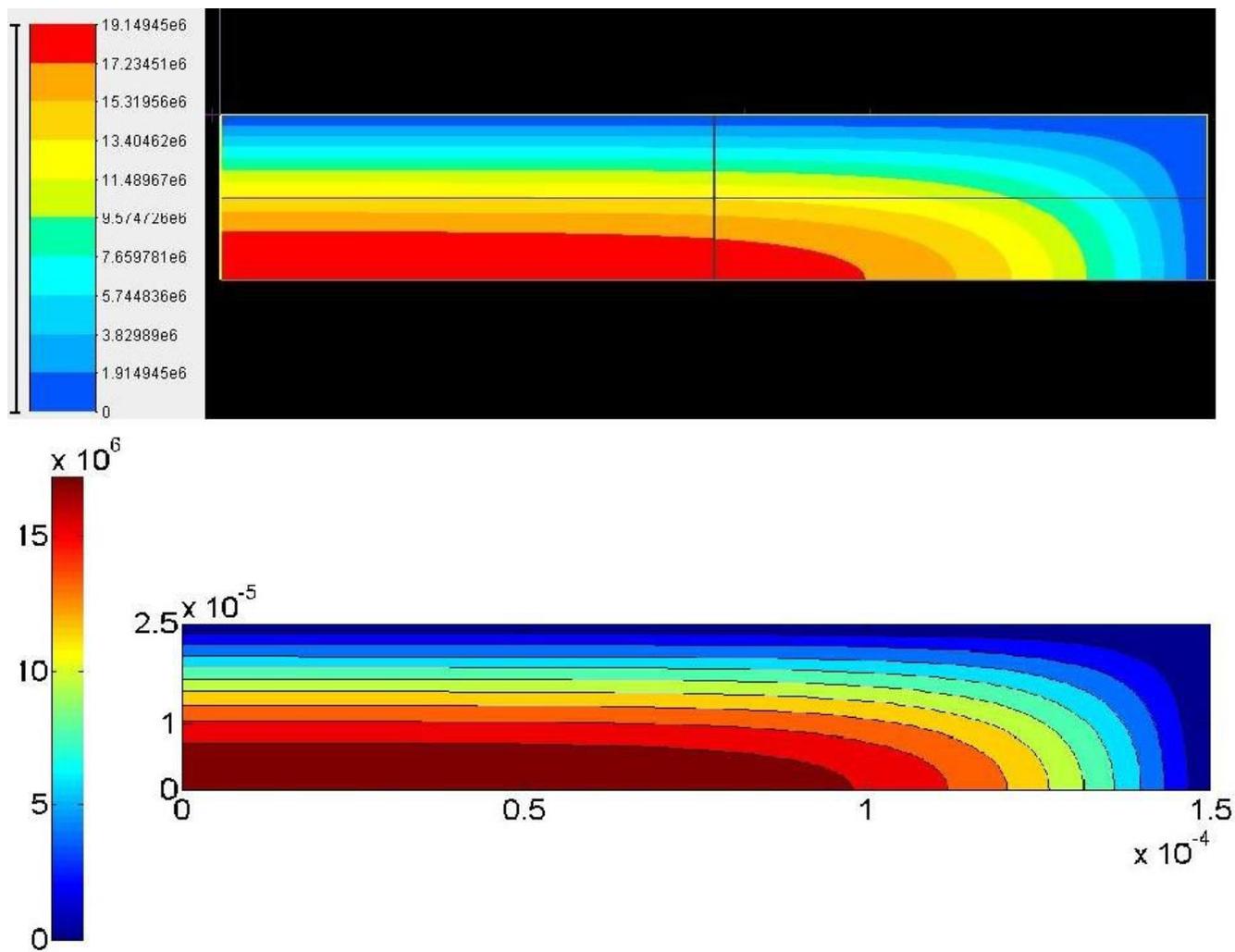


Figura 4.1: Campo de presiones a $2 \times 10^5 rad/s$. Arriba: datos obtenidos de la simulación del modelo. Abajo: Modelo analítico.

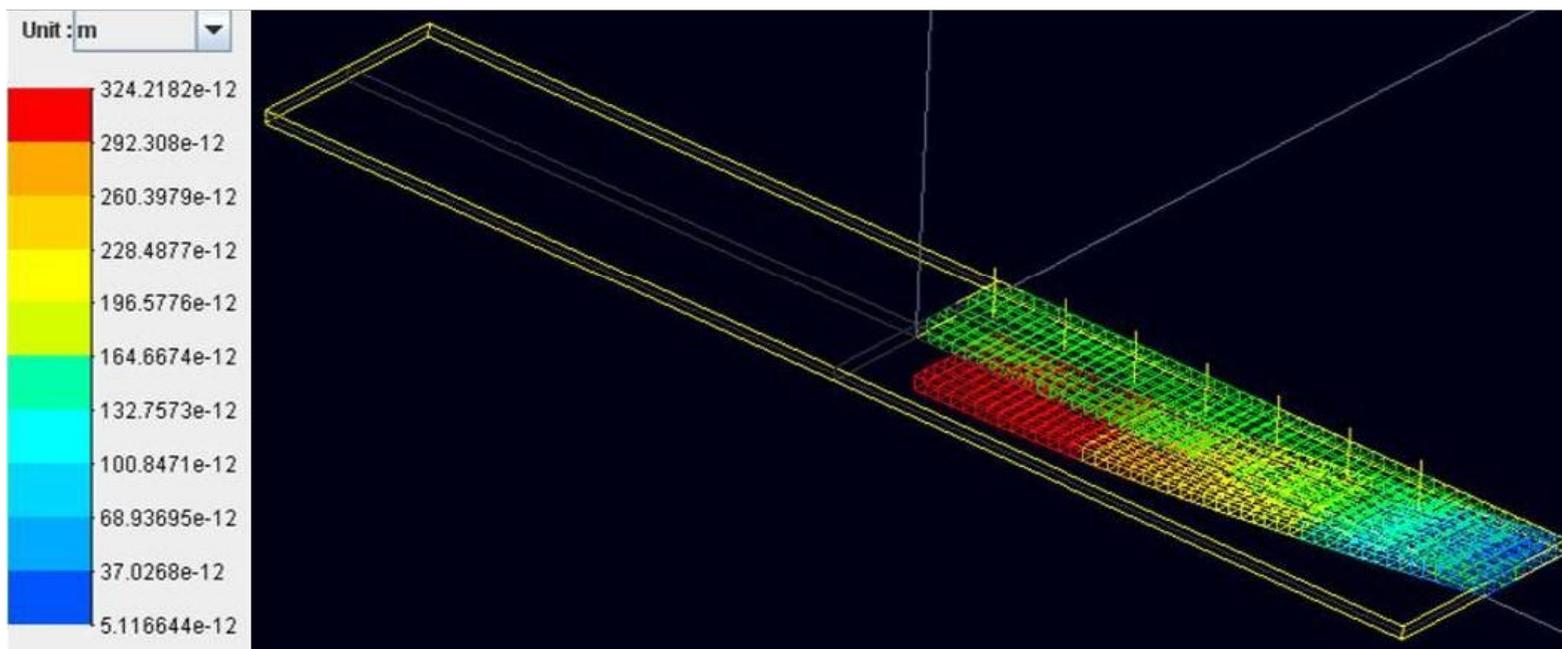


Figura 4.2: Deflexión de la placa doblemente empotrada, con un desplazamiento armónico impuesto en la dirección normal.

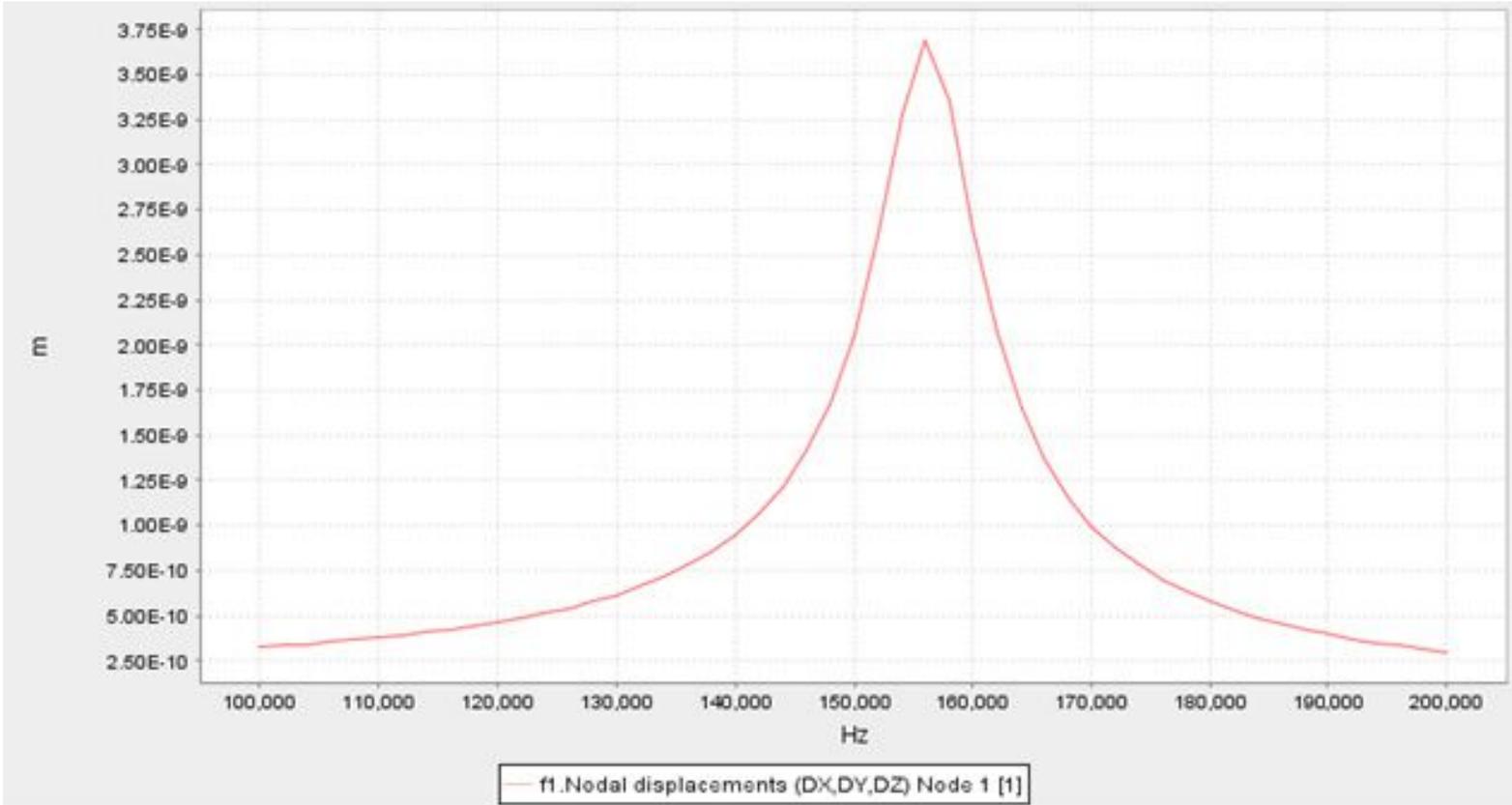


Figura 4.3: Amplitud de desplazamiento del punto medio de la placa en función de la frecuencia.

Capítulo 5

Modelo para microplacas con perforaciones

5.1. Introducción

En este Capítulo se desarrolla el modelo para simular el efecto de amortiguamiento viscoso del flujo de escurrimiento del fluido confinado para el caso en que la placa móvil presenta perforaciones. El dominio en que se resuelve la Ecuación (4.1), como vimos, es coincidente con la cara inferior de la placa móvil. Si ahora consideramos que la placa tiene perforaciones, podemos suponer que la ecuación de Reynolds sigue siendo válida en dicha cara, considerando a las perforaciones con un tratamiento aparte.

A continuación, se muestra cómo lo han tratado diferentes autores, y los modelos propuestos en cada caso, para presentar seguidamente el modelo que se propone en este trabajo.

5.2. Revisión de otros modelos presentados en la literatura

Con el objeto de modelar la presencia de perforaciones en dispositivos MEMS, muchos autores han buscado formulaciones analíticas compactas que puedan implementarse fácilmente. En publicaciones recientes podemos encontrar varios modelos analíticos, donde la mayoría propone utilizar la Ecuación de Reynolds 2D descrita en los Capítulos 3 y 4 modificada con algún término que considere la presencia de perforaciones.

[Homencovschi y Miles \(2010\)](#), por otro lado, resuelve la Ecuación de Navier Stokes completa en un modelo 3D.

Los modelos basados en la Ecuación de Reynolds 2D se pueden clasificar en dos grupos ([Pandey y Pratap, 2008](#); [Nigro et al., 2012](#)). El primer enfoque resuelve una ecuación modificada de Reynolds sobre toda la placa para obtener una amortiguación global ([Bao et al., 2003a](#); [Veijola, 2006a,b](#); [Pandey y Pratap, 2008](#)). Por otro lado, el otro enfoque resuelve la ecuación de Reynolds dentro de una celda que contiene una sola perforación y parte de la placa. Luego el amortiguamiento calculado se multiplica por el número de celdas en que se divide el dominio para obtener la contribución general del amortiguamiento. Este tipo de aproximaciones es apropiado para sistemas en los cuales la relación de aspecto del tamaño de perforación respecto de la celda es grande y la distribución de la presión en cada celda se puede considerar invariante. Ejemplos de este último enfoque lo podemos ver en [Mohite et al. \(2005\)](#); [Kwok et al. \(2005\)](#).

El modelo de homogeneización propuesto en [Veijola \(2006b\)](#) y el modelo PPR ([Veijola y Råback, 2007](#)) pertenecen a estos enfoques, como veremos más adelante. El análisis de la perforación que realizan a través de un circuito eléctrico equivalente es la base para el modelo propuesto en esta tesis. Por esta razón se describen a continuación, para introducir el modelo a desarrollar para simular la presencia de perforaciones en dispositivos MEMS.

5.2.1. Método PPR (Perforation Profile Reynolds)

Este método se basa en la ecuación linealizada de Reynolds [\(5.1\)](#) para flujo incompresible, en la cual se agrega un término de admitancia de flujo adicional Y_h que considera la resistencia del flujo debido a las perforaciones.

$$D_h \frac{h^3}{12\mu_{eff}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - Y_h p = v \quad (5.1)$$

donde tanto Y_h como v dependen de x y y , y μ_{eff} es un coeficiente de viscosidad efectiva que depende del número de Knudsen. D_h es un coeficiente de difusividad adicional, pero en los casos mostrados en [Veijola y Råback \(2007\)](#) y [De Pasquale y Veijola \(2008\)](#), se considera $D_h = 1$.

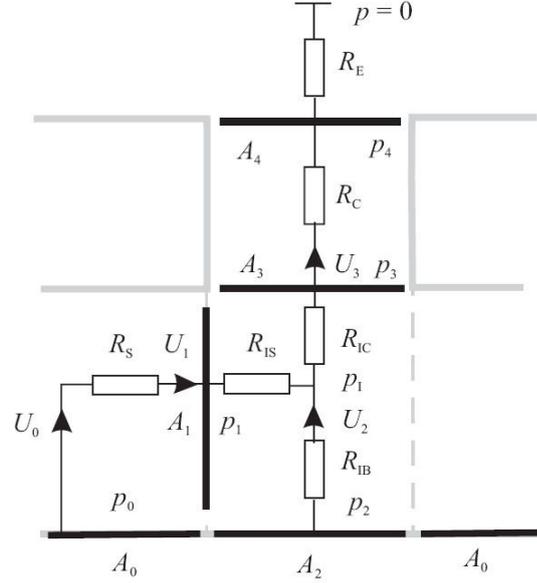


Figura 5.1: Modelo de circuito con resistencias mecánicas propuesto por Veijola.

La admitancia Y_h se define como la inversa de la impedancia acústica Z_S :

$$Y_h = \frac{1}{Z_S} = \frac{v_h}{p_h} \quad (5.2)$$

donde v_h y p_h son la velocidad en la dirección z y la presión en la entrada inferior de la perforación. En el método PPR, se considera el perfil de velocidades en la dirección vertical:

$$Y_h = \begin{cases} \frac{v_h(x, y)}{p_h} & , \text{debajo de la perforación} \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases} \quad (5.3)$$

El perfil de velocidades, para el caso de perforaciones circulares (*tubos*) es:

$$v_s(r) = 2 \frac{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 1 + 2K_{tb}}{Q_{tb}} \quad (5.4)$$

donde $K_{tb} = \lambda/r_0$ es el número de Knudsen dentro de la perforación en el caso de un tubo y $Q_{tb} = 1 + 4K_{tb}$ es el caudal relativo. La expresión final de Y_{ci} (el subíndice ci es

por la geometría cilíndrica) debajo de la perforación es:

$$Y_{ci}(r) = v_s(r)\bar{Y}_{ci} \quad (5.5)$$

donde \bar{Y}_{ci} es la admitancia promedio de la perforación, definida como:

$$\bar{Y}_{ci} = \frac{\pi r_0^2}{R_{IC} + R_C + R_E} \quad (5.6)$$

donde R_{IC} , R_C y R_E son expresiones de resistencias mecánicas debidas al flujo que circula por las perforaciones según el esquema de la Figura 5.1. Las expresiones de cada resistencia se pueden ver en Veijola y Råback (2007).

En el caso de perforaciones de sección cuadrada (*canal*), se realiza la transformación correspondiente para cada parámetro (ver Veijola (2006a) y Veijola y Råback (2007)).

La ecuación PPR 5.1 se resuelve con el solver PPR armónico. Para cada perforación cuadrada de lado s_0 , se utilizan las expresiones de admitancia para geometría circular con r_0 un radio efectivo

$$r_0 = 1.094 \frac{s_0}{2} \quad (5.7)$$

Se consideran también efectos de contorno, extendiendo cada borde externo de la estructura en $0.65h(1 + 3.3K_{ch})$, donde $K_{ch} = \lambda/s_0$ es el número de Knudsen dentro de la perforación en el caso de un canal.

Resumiendo, la solución del método PPR consiste en dos partes: i) determinar el perfil de admitancia y difusividad relativa (que en realidad la fija en $D_h = 1$) debido a las perforaciones y ii) resolver la Ec. 5.1 con un solver FEM en 2D armónico. Se utilizan correcciones de deslizamiento en paredes (μ_{eff}) y efectos de contorno en los bordes externos de la estructura.

5.2.2. Método de Homogeneización

En este método, la admitancia Y_h del flujo se considera uniformemente distribuida sobre toda la superficie. En la simulación FEM 2D las perforaciones son excluidas de la estructura simulada y la admitancia se incluye en la ecuación de Reynolds extendida. Si se tiene una distribución uniforme de perforaciones, la admitancia del flujo se considera constante sobre toda la superficie. Es decir, se considera la ecuación 5.1 pero la

interpretación de Y_h es diferente que en el método PPR. En [Veijola \(2006b\)](#) y [Veijola \(2006a\)](#) se muestran modelos para perforaciones cilíndricas y cuadradas respectivamente, utilizando el concepto de *celda de perforación*. En el modelo de homogeneización, tenemos:

$$Y_h = \frac{a_{eff}^2}{NR_p} \quad (5.8)$$

donde N es el número de perforaciones, $a_{eff} = a + 1.3h(1 + 3.3K_{ch})$ es la longitud efectiva del lado de la superficie (considerada cuadrada) y R_p es la resistencia mecánica correspondiente a una sola perforación y se calcula a partir de las resistencias mecánicas que se ven en el esquema de la Figura [5.1](#) como ([Veijola y Råback, 2007](#)):

$$R_p = R_S + R_{IS} + R_{IB} + \frac{r_x^4}{r_0^4} (R_{IC} + R_C + R_E) \quad (5.9)$$

donde r_x y r_0 son los radios de la celda y la perforación respectivamente. En geometría cuadrada, la expresión de R_p es similar, usando el cociente entre los lados de la celda y de la perforación. También las expresiones de las resistencias son distintas por la geometría, como así también de los parámetros de elongación relativa.

Estos parámetros se obtienen en función del cociente entre el radio de la perforación y el radio de la celda (de los lados en el caso de geometría cuadrada), a través de simulación FEM 3D, obteniendo diferentes expresiones para geometría cilíndrica en [Veijola \(2006b\)](#) y cuadrada en [Veijola \(2006a\)](#).

Resumiendo, se resuelve la ecuación [\(5.1\)](#) a través de FEM usando Y_h como muestra [\(5.8\)](#). La estructura simulada se considera sin perforaciones, y se obtienen resultados globales sobre toda la superficie. Para estimar el valor de Y_h se utiliza FEM 3D en una celda, y se resuelven los parámetros de elongación relativa por este método, con errores menores al 5 % o 1 % según la geometría.

5.3. Modelo propuesto en esta Tesis

En esta sección se desarrolla un modelo numérico por el Método de Elementos Finitos para resolver el campo de presiones y desplazamientos sobre la placa móvil ([Gomez Barroso et al., 2013](#)). El fluido confinado se modela a través de la Ecuación de Reynolds 2D con condiciones de contorno mixtas en todas las fronteras. Para analizar las perforaciones se considera el resbalamiento en las paredes (slip), como así también el efecto en los extremos (entrada y salida del fluido). Los contornos libres se modelan

considerando el flujo que entra y sale sistemáticamente producido por el fenómeno de estrujamiento.

5.3.1. Condiciones de contorno y formulación general completa

Consideremos el caso de una placa rectangular con M perforaciones que se mueve en dirección normal al sustrato, y que se encuentra empotrada en uno de los bordes (cantilever) o en dos bordes opuestos entre sí (placa doblemente empotrada, (ver Fig. 5.2)). Podemos considerar que la variación de la presión en la dirección normal a los bordes empotrados Γ_{q_0} es nula (Darling et al., 1998).

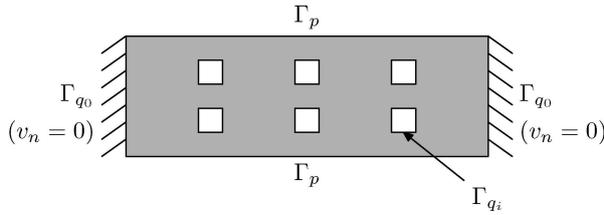


Figura 5.2: Dominio Ω (en gris) y fronteras con distintas condiciones de contorno.

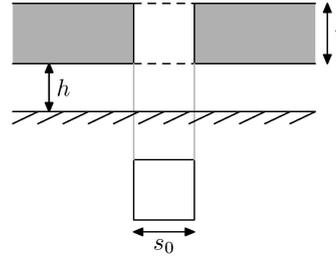


Figura 5.3: Esquema de una perforación, vista lateral.

Tanto en los contornos Γ_{q_i} (con $i = 1, 2, \dots, M$) de las perforaciones como en los contornos libres Γ_p , la variación de la presión es proporcional a la velocidad normal promedio v_n del fluido sobre esas fronteras. Por lo tanto, el problema para resolver el campo de presión que ejerce el fluido sobre la placa móvil queda determinado a partir de la Ec. (3.2) como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (5.10a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{12\mu}{h^2} v_n \quad \text{sobre } \bigcup_{i=0}^n \Gamma_{q_i} \cup \Gamma_p \quad (5.10b)$$

En la ecuación anterior, el dominio del fluido Ω se asume coincidente con la superficie inferior de la placa, que es la que entra en contacto con el fluido confinado, y las

fronteras Γ_p y Γ_{q_i} , como se describió anteriormente, son las fronteras donde se considera la velocidad normal del fluido. El caso $i = 0$ es la frontera de empotramiento ($v_n = 0$) en el borde externo, mientras que $i = 1, \dots, M$ corresponde a las fronteras de las perforaciones sobre el dominio Ω .

5.3.2. Modelo numérico y Método de Elementos Finitos

Partiremos de la Ecuación (5.10a) aplicando las condiciones de contorno propuestas, y se considera a la perforación en un esquema similar al de la Figura 5.1 considerando en este caso, resistencias hidráulicas en lugar de resistencias mecánicas.

Debilitando (5.10a) e integrando por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_{\Omega} \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS \\ & - \sum_{i=0}^M \left(\int_{\Gamma_{q_i}} \delta p \left(\frac{p_0 h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma \right) - \int_{\Gamma_p} \delta p \left(\frac{p_0 h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

El caudal de entrada en una dada frontera de perforación i es:

$$Q_i \equiv \int_{\Gamma_{q_i}} v_n h d\Gamma \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.12)$$

donde Γ_{q_i} es el contorno inferior de la perforación i , v_n es la velocidad normal promedio a ese contorno, y h es el gap a la altura de la perforación. Usando las condiciones (5.10b) y la ecuación (5.12), tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_{\Omega} \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS \\ & + \sum_{i=1}^M p_0 (\delta p_i) Q_i + \int_{\Gamma_p} (\delta p) p_0 h v_n d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analizando la diferencia de presión entre diferentes puntos según la Figura 5.4 tenemos:

$$p_i - p_I = R_{IS} Q_i \quad (5.14)$$

$$p_I = (R_{IC} + R_C + R_E) (Q_i + Q_2) \quad (5.15)$$

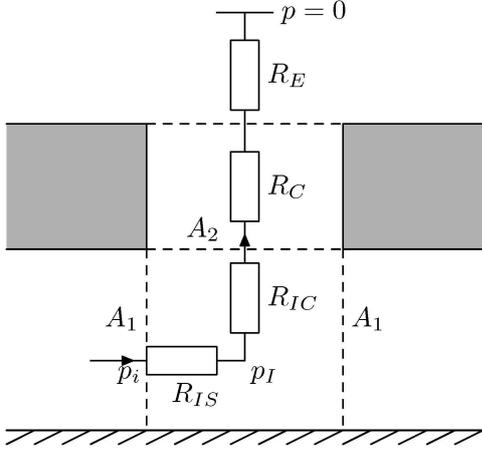


Figura 5.4: Esquema de la perforación como circuito con resistencias hidráulicas.

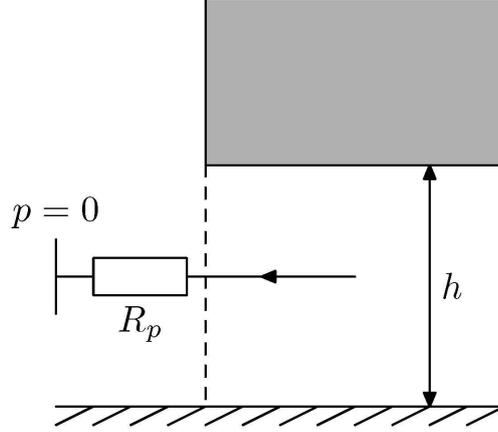


Figura 5.5: Esquema para el análisis del contorno Γ_P .

donde p_i corresponde a la presión en el contorno inferior de la perforación i , Q_i el caudal que atraviesa el área A_1 y Q_2 el caudal que atraviesa el área A_2 , correspondiente a la sección de la perforación (ver Fig. 5.4), es decir $Q_2 = A_2 v_z$, donde v_z es la velocidad del fluido que atraviesa el área A_2 . Se aclara que a partir de la expresión (5.14) en adelante, las resistencias que aparecen son resistencias hidráulicas utilizadas en la Figura 5.4, que definiremos más adelante, y no las resistencias mecánicas utilizadas en la Figura 5.1. Sin embargo se relacionan estrechamente, en el sentido de que la resistencia hidráulica es el cociente entre la resistencia mecánica y el cuadrado del área involucrada.

Despejando p_i de (5.14) y (5.15) tenemos:

$$p_i = R_{IS}Q_i + (R_{IC} + R_C + R_E)(Q_i + Q_2) \quad (5.16)$$

Finalmente, despejando el caudal en la Ec. (5.16), considerando a $v_z = \partial h / \partial t$ (es decir, v_z se considera igual a la velocidad vertical de la placa) obtenemos la expresión que deseamos para la implementación de nuestro modelo:

$$Q_i = \frac{1}{R_{IS} + R_{IC} + R_C + R_E} p_i - \frac{R_{IC} + R_C + R_E}{R_{IS} + R_{IC} + R_C + R_E} A_2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.17)$$

que la podemos expresar como:

$$Q_i = Y_i p_i - C_i \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.18)$$

Para tener en cuenta el efecto de borde de los contornos libres Γ_P (ver Fig. 5.5), consideramos el caudal del flujo que atraviesa una sección de altura h y ancho unitario en Γ_P :

$$h v_n = \frac{1}{R_p} p \quad (5.19)$$

donde R_p es la resistencia hidráulica por unidad de longitud calculada como:

$$R_p = \frac{12\mu}{h^2} \Delta_p \quad (5.20)$$

donde Δ_p es un parámetro de longitud efectiva, dependiente de la geometría de la perforación. Entonces, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{p_0 h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\delta p)}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS + \int_{\Omega} \delta p \left(h \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} \right) dS \\ & + p_0 \sum_{i=1}^M \delta p_i Y_i p_i - p_0 \sum_{i=1}^M \delta p_i C_i \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{\Gamma_p} \delta p \left(\frac{p_0 h^2}{12\mu \Delta_p} \right) p d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dividiendo por p_0 esta última expresión para normalizar, y agregando la Ec. (4.24) que representa el análisis estructural de la placa móvil, obtenemos un sistema matricial similar al obtenido en la Ecuación (4.26):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

donde los aportes nodales de las expresiones Y_i y C_i se agregan en las matrices \mathbf{A} y \mathbf{H} respectivamente, mientras que la integral de contorno sobre Γ_p aporta a la matriz \mathbf{A} (Gomez Barroso et al., 2013).

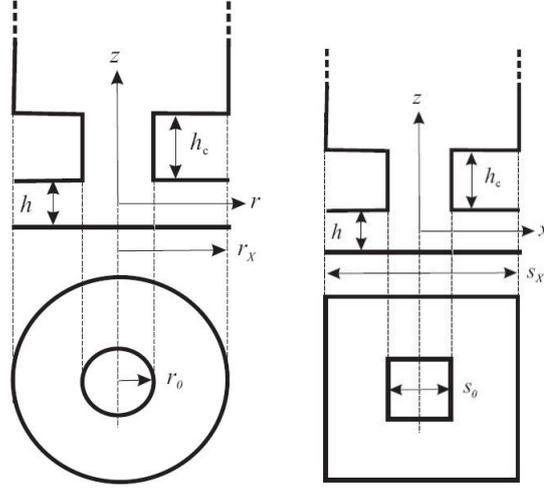


Figura 5.6: Diferentes geometrías de perforaciones y sus parámetros.

5.3.3. Expresiones de las resistencias

Veamos qué representa cada resistencia involucrada en nuestro análisis. Primeramente, tenemos la resistencia del *tubo* de la perforación representada por R_C . Si consideramos efectos de entrada y salida del fluido, éstos se representan por las resistencias R_{IC} y R_E . En este sentido, podemos expresar la resistencia en la perforación como la suma de R_C , R_{IC} y R_E . Si consideramos un flujo Poiseuille, tendremos, para el caso de un *tubo* o perforación de sección circular (Veijola, 2006b):

$$R_C + R_{IC} + R_E = \frac{8\mu}{\pi r_0^4} \left(\frac{h_c}{1 + 4K_{tb}} + (\Delta_C + \Delta_E) r_0 \right) \quad (5.23)$$

y para el caso de un *canal* o perforación de sección cuadrada (Veijola, 2006a):

$$R_{C\Box} + R_{IC\Box} + R_{E\Box} = \frac{\chi\mu}{2s_0^4} \left(\frac{h_c}{1 + 7.567K_{ch\Box}} + (\Delta_{C\Box} + \Delta_{E\Box}) 1.094 \frac{s_0}{2} \right) \quad (5.24)$$

donde K_{tb} y $K_{ch\Box}$ son los números de Knudsen para un tubo y un canal respectivamente, es decir:

$$K_{tb} = \frac{\lambda}{r_0} \quad \text{y} \quad K_{ch\Box} = \frac{\lambda}{s_0}$$

donde λ es el camino libre medio entre las partículas del fluido.

Recordemos que s_0 y r_0 se relacionan por la siguiente expresión:

$$r_0 = 1.094 \frac{s_0}{2} \quad (5.25)$$

El valor de $\Delta_C + \Delta_E$ (para un *tubo*), según Sharipov (Sharipov y Seleznev, 1998) es $3\pi/8$, mientras que para $\Delta_{C_\square} + \Delta_{E_\square}$ (para un *canal*) es $8/3\pi$.

Analicemos ahora la resistencia R_{IS} . Según Veijola (Veijola, 2006b), para el caso de un *tubo*, podemos considerar un *canal* de ancho $w = 2\pi r_0$, altura h (es decir, canal de sección A_1) y longitud $\Delta_S h$. Si no consideramos el escalamiento por áreas (A_0^2/A_1^2), evitando la dependencia de *celdas* (Veijola, 2006b), podemos expresar R_{IS} como:

$$R_{IS} = \frac{6\mu}{\pi r_0 h^2} \Delta_S \quad (5.26)$$

y para el caso de perforación tipo *canal* (Veijola, 2006a) tenemos:

$$R_{IS_\square} = \frac{3\mu}{s_0 h^2} \Delta_{S_\square} \quad (5.27)$$

Utilizamos como Δ_S y Δ_{S_\square} el valor para *canal* que mencionamos anteriormente: $8/3\pi$.

Capítulo 6

Aplicación del modelo: Análisis y Discusión de Resultados

6.1. Introducción

En este Capítulo se muestran algunos resultados obtenidos, tanto para placas sin perforaciones como para placas con perforaciones. Los ejemplos para las simulaciones se eligieron de la bibliografía, con el objetivo de comparar resultados experimentales ([Rochus et al., 2012](#); [De Pasquale et al., 2010](#); [Somà y De Pasquale, 2008](#)) y de otros modelos ([De Pasquale y Veijola, 2008](#); [Veijola, 2006a](#), [b](#)).

En cuanto a los ejemplos experimentales se describirá la implementación correspondiente para el análisis estático y armónico del problema. Para los casos de modelos numéricos, sólo se modela como se describió en los Capítulos [4](#) y [5](#) realizando un análisis armónico.

6.2. Comparación con otros modelos numéricos

6.2.1. Placa cuadrada rígida con velocidad vertical impuesta

Estos modelos son extraídos de la bibliografía ([De Pasquale y Veijola, 2008](#)). Se comparan resultados donde se utiliza el modelo PPR mencionado en la Sección [5.2](#).

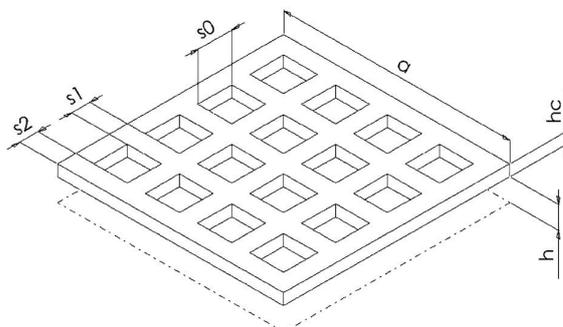


Figura 6.1: Esquema de la placa perforada para los ejemplos numéricos.

La velocidad vertical impuesta es de $v = 1\text{m/s}$, y se considera un gap de $h_0 = 1\mu\text{m}$. La estructura modelada es una placa cuadrada de $40\mu\text{m}$ de lado, con una red de 16×16 perforaciones de sección cuadrada (ver Fig 6.1). Se analizan ocho estructuras distintas combinando dos espesores h_c distintos ($1\mu\text{m}$ y $5\mu\text{m}$) para cuatro tamaños distintos de perforaciones de lado s_0 ($0.5\mu\text{m}$, $1\mu\text{m}$, $2\mu\text{m}$ y $3\mu\text{m}$). Por razones de simetría, sólo se modela un cuarto de la placa.

A modo de ilustración, mostramos en la Fig. 6.2 los perfiles de presión para el caso de una perforación pequeña ($s_0 = 0.5\mu\text{m}$, y $h_c = 5\mu\text{m}$) y otra mayor ($s_0 = 3\mu\text{m}$ y $h_c = 1\mu\text{m}$).

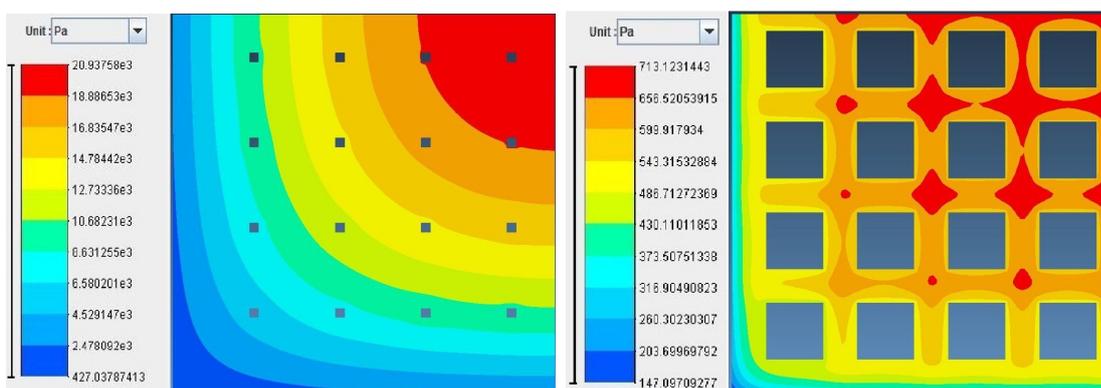


Figura 6.2: Perfiles de presión obtenidos con el modelo. A la izquierda $s_0 = 0.5\mu\text{m}$ y $h_c = 5\mu\text{m}$. A la derecha $s_0 = 3\mu\text{m}$ y $h_c = 1\mu\text{m}$.

Analizamos el valor de la *resistencia mecánica* Z_m , definida como el cociente entre la fuerza F que ejerce el fluido sobre la placa y la velocidad en la dirección vertical (impuesta para todos los modelos en $v = 1\text{m/s}$). En la Fig. 6.3 se muestran los resultados obtenidos en el cálculo de la resistencia mecánica en función de una razón de perforación

(porcentaje del área ocupada por las perforaciones en relación al área de la placa sin perforaciones). Los resultados obtenidos con nuestro modelo se representan con línea de trazos roja en el caso de espesor de la placa $h_c = 5\mu\text{m}$ y línea continua azul para el caso de $h_c = 1\mu\text{m}$. Se comparan con valores obtenidos por un modelo 3D *full* (representado por cuadrados y puntos gruesos respectivamente) utilizado como referencia para la estimación de errores en [De Pasquale y Veijola \(2008\)](#).

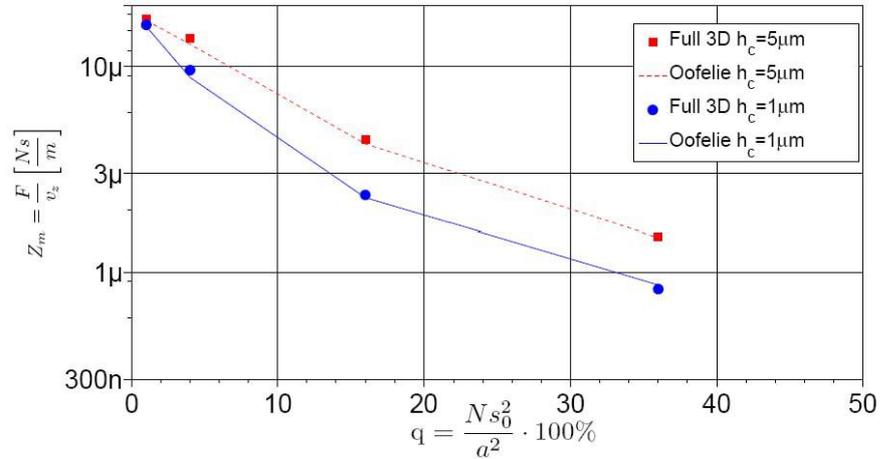


Figura 6.3: Resistencia mecánica en función de la razón del área ocupada por las perforaciones. En línea continua resultados con Oofelie y en puntos resultados con modelo full 3D.

En la Tabla [6.1](#) se muestran los errores (relativos al modelo 3D *full*) del modelo PPR de Veijola y el modelo propuesto por nosotros ([Gomez Barroso et al., 2013](#)).

h_c [μm]	s_0 [μm]	Error con PPR [%]	Error con Modelo FEM [%]
1.0	0.5	–	-1.83
	1.0	-1.78	-7.90
	2.0	-2.66	-2.91
	3.0	-3.57	4.76
5.0	0.5	–	-1.01
	1.0	-0.73	-6.27
	2.0	-0.16	-4.95
	3.0	-0.71	-0.94

Tabla 6.1: Errores cometidos para diferentes ejemplos. Se utiliza gap $h = 1\mu\text{m}$.

6.2.2. Discusión de los resultados

Como podemos apreciar en la tabla [6.1](#), los resultados obtenidos son muy satisfactorios. El error comparado con el modelo 3D full es bajo y no varían considerablemente al modificar el tamaño de las perforaciones, y varían levemente al modificar el espesor de la placa móvil.

Comparado con el modelo PPR, vemos que obtenemos errores del mismo orden. Podemos observar la ventaja de nuestro modelo al no depender ni de la distribución de las perforaciones ni del modelo de celdas que considera Veijola en su modelo PPR. En nuestro modelo tampoco se utilizan cálculos de un modelo 3D para ajustar los parámetros de elongación efectiva.

6.3. Estudio de ejemplos experimentales

Los ejemplos aquí descritos no sólo se utilizan para validar el modelo de flujo de estrujamiento, si no también para mostrar que dicho modelo puede ser acoplado con otros campos actuantes. Para ello, en los ejemplos experimentales de la bibliografía, en los que actúa el campo eléctrico, se modela el sistema completo acoplado de los 3 campos, a saber: el campo de presiones, el campo de desplazamientos y el campo eléctrico, como se describe a continuación.

6.3.1. Acoplamiento con el campo eléctrico

El equilibrio mecánico y electrostático se resuelve con método de elementos finitos, como describe [Rochus \(2006\)](#). Para obtener el sistema matricial a resolver, primero se considera el comportamiento piezoeléctrico del sistema, a través de la *energía eléctrica de Gibbs*:

$$G = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \quad (6.1)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones. Hemos llamado \mathbf{D} al tensor de desplazamiento eléctrico y \mathbf{E} al campo eléctrico. Integrando [\(6.1\)](#) en el volumen del cuerpo, obtenemos la energía total interna. Teniendo en cuenta el entorno del cuerpo, se plantea la energía total del sistema como la energía interna menos la energía externa.

Los tensores de la expresión (6.1) se relacionan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{H}\boldsymbol{\epsilon}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi.\end{aligned}\tag{6.2}$$

siendo \mathbf{H} el tensor de cuarto orden de coeficientes elásticos (que al convertir por medio de la notación de Voigt usamos el tensor de segundo orden \mathbf{C} , como se describió en el Capítulo 4), ε la matriz de permitividad eléctrica, y ϕ el potencial electrostático.

Teniendo en cuenta las siguientes fórmulas de interpolación

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{q}, \quad \phi = \mathbf{Q}_\phi\boldsymbol{\Phi},\tag{6.3}$$

y aplicando el principio de los trabajos virtuales en el campo de desplazamientos y en el potencial eléctrico, se puede llegar a un sistema matricial acoplado de la forma (Rochus et al., 2006):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{f}_{ext} \\ \Delta\mathbf{Q}_{ext} \end{bmatrix}\tag{6.4}$$

El vector $\Delta\mathbf{f}_{ext}$ corresponde a la variación de las fuerzas externas respecto de un estado de equilibrio, y el vector $\Delta\mathbf{Q}_{ext}$ corresponde a la variación de las cargas externas del sistema. Las submatrices de rigidez de la Ec. (6.4) se definen como:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{uu} &= \mathbf{K} - K_{uu}^* \\ \mathbf{K}_{u\phi} &= \mathbf{K}_{\phi u}^T = \int_V \mathbf{Q}_u^T \mathbf{F}_1 \mathbf{B}_\phi dV \\ \mathbf{K}_{\phi\phi} &= - \int_V \mathbf{B}_\phi^T \varepsilon \mathbf{B}_\phi \delta\boldsymbol{\Phi} dV\end{aligned}\tag{6.5}$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez definida en (4.17), \mathbf{Q}_u es el gradiente simple de las funciones de forma de \mathbf{Q} , \mathbf{B}_ϕ la matriz compuesta por las derivadas de las funciones de forma de \mathbf{Q}_ϕ . \mathbf{F}_1 es una matriz de 9×3 que está en función de las componentes de la matriz de permitividad eléctrica ε y de las derivadas del potencial eléctrico respecto de las coordenadas locales. La expresión de la matriz \mathbf{K}_{uu}^* es un tanto más compleja. Es la suma de las integrales sobre el volumen en cuestión de las proyecciones sobre las componentes del gradiente de \mathbf{Q}_u del producto entre una matriz del tipo \mathbf{Q}_u pero en

función de un segundo desplazamiento virtual ¹, multiplicada por una matriz de 9×3 con entradas en función de las componentes de la matriz de permitividad eléctrica y las derivadas del campo y el desplazamiento eléctrico respecto de las coordenadas locales.

6.3.2. Análisis armónico y acoplamiento electro-mecano-flúidico

Una carga cíclica que se mantiene en el tiempo aplicada a un sistema estructural, producirá una respuesta cíclica sobre dicho sistema de la misma naturaleza (respuesta armónica). Un sistema sometido a esta carga a una frecuencia dada responderá de acuerdo a la misma función, a la misma frecuencia (vibración).

A bajas frecuencias de excitación, el sistema responde en fase con la excitación, con una amplitud aproximadamente igual a la que tendría el sistema si la fuerza se aplicara estáticamente. A frecuencias altas de excitación, el sistema responde a contra-fase (180°), con amplitudes pequeñas en comparación a las que tendría si la fuerza se aplicara estáticamente. Cerca de la frecuencia de resonancia, la respuesta está desfasada 90° con la excitación y la amplitud de la respuesta es muy alta.

El análisis armónico para analizar una respuesta de un sistema permite predecir el comportamiento dinámico sostenido (que se mantiene en el tiempo), lo que permite verificar si un diseño resistirá con éxito a la resonancia, la fatiga y otros efectos nocivos de las vibraciones forzadas. El análisis armónico se utiliza entonces, para determinar la respuesta de estado estacionario de una estructura lineal sometida a cargas que varían sinusoidalmente con el tiempo (armónicamente).

El objetivo es calcular la respuesta de una estructura a varias frecuencias y obtener resultados (por lo general desplazamientos) en función de la frecuencia. Entonces, se pueden identificar en el gráfico las respuestas *pico* y examinar tensiones en esas frecuencias. Esta técnica de análisis calcula sólo los de estado estacionario. Las vibraciones transitorias, que se producen al comienzo de la excitación, no se tienen en cuenta en un análisis armónico.

Con este tipo de análisis resolvemos el sistema en cuestión sometido a un potencial alterno (AC). Teniendo en cuenta el sistema matricial que se plantea en el modelo fluido-mecánico y el obtenido en la sección anterior, podemos expresar el sistema completo de

¹El desarrollo completo de esta expresión se puede observar en el Apéndice C de [Rochus \(2006\)](#).

la siguiente manera (Rochus et al., 2012):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{G} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{ext} \quad (6.6)$$

donde el vector \mathbf{F}_{ext} corresponde a las fuerzas externas generalizadas con componentes de fuerza externa mecánica, cargas eléctricas externas y presiones externas.

6.3.3. Comparación de resultados

En estos ejemplos, la parte móvil del dispositivo se somete primeramente a un potencial eléctrico continuo (DC) para obtener una deflexión inicial. Aquí se realiza el análisis estático para simularlo. Luego se somete a la estructura deformada a un potencial alterno (AC) en forma de ruido blanco a diferentes frecuencias. En el análisis estático resolvemos un problema electrostático acoplado al sistema estructural. Para ello se encierra a la placa (o cantilever) en un volumen dieléctrico, cuyo contorno externo resuelve el potencial eléctrico mediante elementos de contorno (BEM). En la Figura 6.4 se muestra una geometría con la malla correspondiente para este análisis.

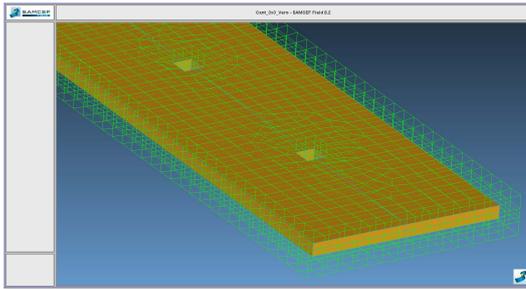


Figura 6.4: Malla de la geometría dentro de volumen dieléctrico para el caso de un cantilever con perforaciones.

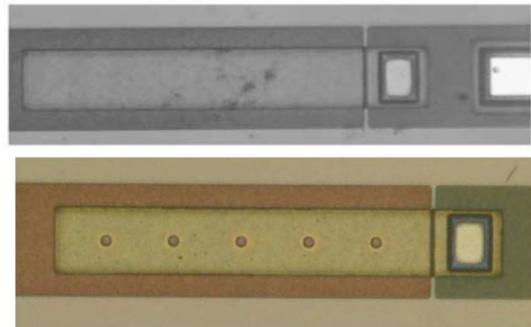


Figura 6.5: Fotografía de cantilever usado en modelos experimentales (Rochus et al., 2012) sin perforaciones (arriba) y con perforaciones (abajo).

En el análisis armónico, se parte de la deformación inicial del análisis estático, y se realiza un barrido en frecuencia simulando la excitación de la parte móvil por medio de una fuerza electrostática debida a un potencial alterno (AC). Es en esta parte donde

obtenemos el campo de presiones sobre el dominio Ω a través del método de elementos finitos como lo plantea la Ec. (4.26).

Cantilever 175 μ m

Esta experiencia se realizó en la sala blanca (clean room) de la Universidad de Liège (Bélgica) con el equipamiento adecuado para realizar las mediciones (Rochus et al., 2009). El micro-resonador de este ejemplo consiste en una viga cantilever de polisilicio suspendida sobre un electrodo depositado sobre el sustrato (ver Fig. 6.5). El módulo de Young se estima en 158 ± 10 GPa, el coeficiente de Poisson es 0.22 ± 0.01 y la densidad del material 2330 kg/m³. Se utiliza una viscosidad del aire de 1.8×10^{-5} Pa.s y la presión ambiente de 10^5 Pa.

Descripción de la experiencia. La estructura antes descrita se deforma consiguiendo la deflexión a partir de someter a la misma a un voltaje DC de 5 V. Posteriormente se superpone a este voltaje, una señal de ruido blanco (voltaje AC) cuyo espectro de frecuencia varía de 0 a 500 kHz. Esta señal promedia los 0.027 V con valores máximo y mínimo de 0.024 V y 0.03 V para el caso de la viga sin perforaciones. Para la viga con 5 perforaciones de $4\mu\text{m} \times 4\mu\text{m}$, la intensidad media es de 0.023 V con valor mínimo de 0.02 V y máximo 0.027 V (Rochus et al., 2012).

En esta experiencia se mide la deflexión en la dirección normal a la placa fija por medio de un analizador *MSA-400 Micro System Analyzer*, utilizado tanto para el caso estático como en el dinámico (Gutschmidt et al., 2009). Este instrumento permite medir con gran precisión tanto el desplazamiento fuera del plano como la velocidad de vibración. Para ello se hace uso del vibrómetro laser-Doppler que tiene incorporado (MSA-400 Micro System Analyzer).

Descripción de la simulación. Se modela una viga con las dimensiones determinadas experimentalmente, y los parámetros estructurales que proporciona (Rochus et al., 2012). La geometría que se utiliza es una prisma delgado simple, empotrado en un extremo (no se modela la geometría particular del empotramiento). Se encierra a la placa en un volumen dieléctrico (ver Fig. 6.4). Se realiza el mallado de la geometría y se eligen los elementos correspondientes para cada parte del sistema. La viga se somete a

un potencial directo de 5V (DC), y se resuelve un problema acoplado por el Método de los Elementos Finitos para obtener los campos eléctrico y de desplazamientos (sistema electro-mecánico acoplado). En la Fig. 6.6 podemos observar el campo eléctrico en el entorno de la viga. Se colocaron planos de visualización con fines ilustrativos, ya que dicho campo se resuelve en el entorno del volumen dieléctrico que encierra a la viga por medio del Método de Elementos de Contorno (BEM). A partir de los datos de desplazamientos obtenidos en el análisis estático, se realiza el análisis armónico, barriendo frecuencias en el rango de la experiencia (0 a 500 kHz). En este caso, el modelo resuelve los campos de presiones y desplazamientos para las diferentes frecuencias. La fuerza debida al voltaje superpuesto como ruido blanco es considerada como una fuerza externa al sistema mecánico.

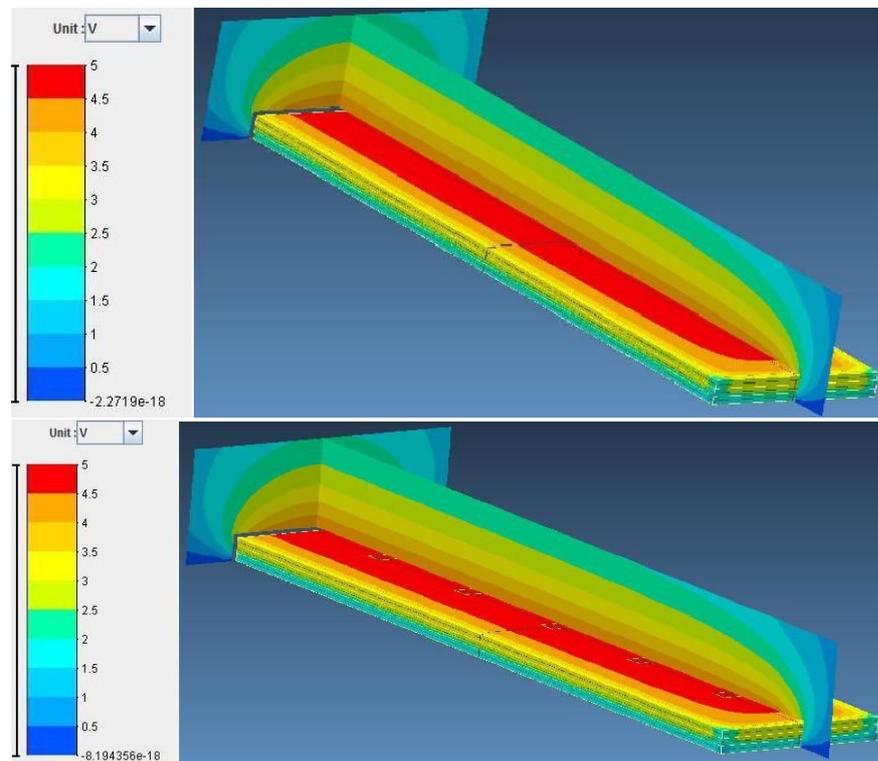


Figura 6.6: Visualización del campo eléctrico en el análisis estático. Viga sin perforaciones (arriba) y con perforaciones (abajo).

En la Fig. 6.7 se compara el resultado obtenido con la simulación para el caso sin perforaciones y los valores experimentales del sistema. En en la Fig. 6.8 se presenta el caso del cantilever con 5 perforaciones.

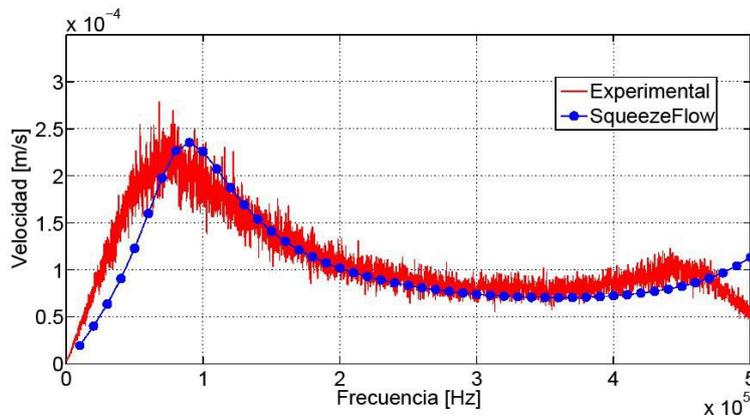


Figura 6.7: Cantilever sin perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros nominales (línea continua con puntos).

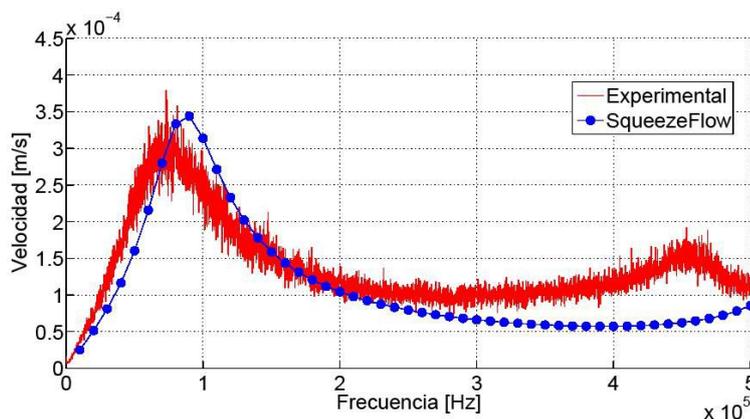


Figura 6.8: Cantilever con perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros nominales (línea continua con puntos).

En esta primera estimación se utilizaron parámetros nominales para el módulo de Young y la densidad de la placa. Hay que tener en cuenta que no se modela el efecto de empotramiento ni las posibles imperfecciones debido a los procesos de fabricación que afectan de alguna manera a los parámetros estructurales del sistema.

En la Figura [6.9](#) podemos ver los perfiles de presión y claramente se visualizan las condiciones de contorno del modelo propuesto. En los bordes externos de la placa, donde no está empotrada, la variación de presión es baja, pero no nula. En tanto que en el contorno correspondiente a alguna de las perforaciones, la presión es la misma en cada nodo, correspondiente a una presión promedio como se planteó en el Capítulo [5](#).

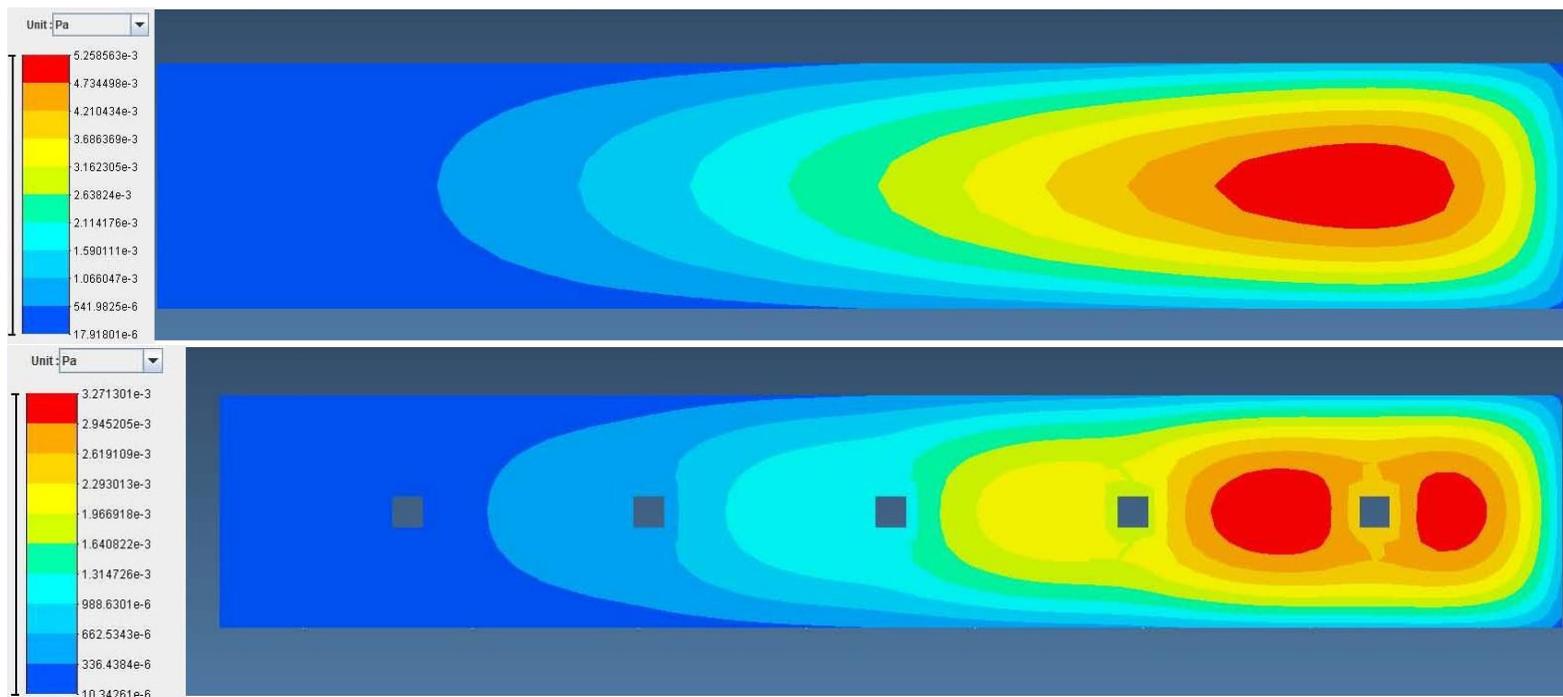


Figura 6.9: Perfiles de presiones de los cantilevers. Arriba: Caso sin perforaciones. Abajo: Caso con 5 perforaciones.

Placa con 36×6 perforaciones

En este ejemplo, se simula una de las estructuras de prueba de [Somà y De Pasquale \(2008\)](#) con las siguientes dimensiones:

- Placa: $364\mu\text{m} \times 66\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$
- Soporte: $122\mu\text{m} \times 3.5\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$
- Perforaciones: $5\mu\text{m} \times 5\mu\text{m}$

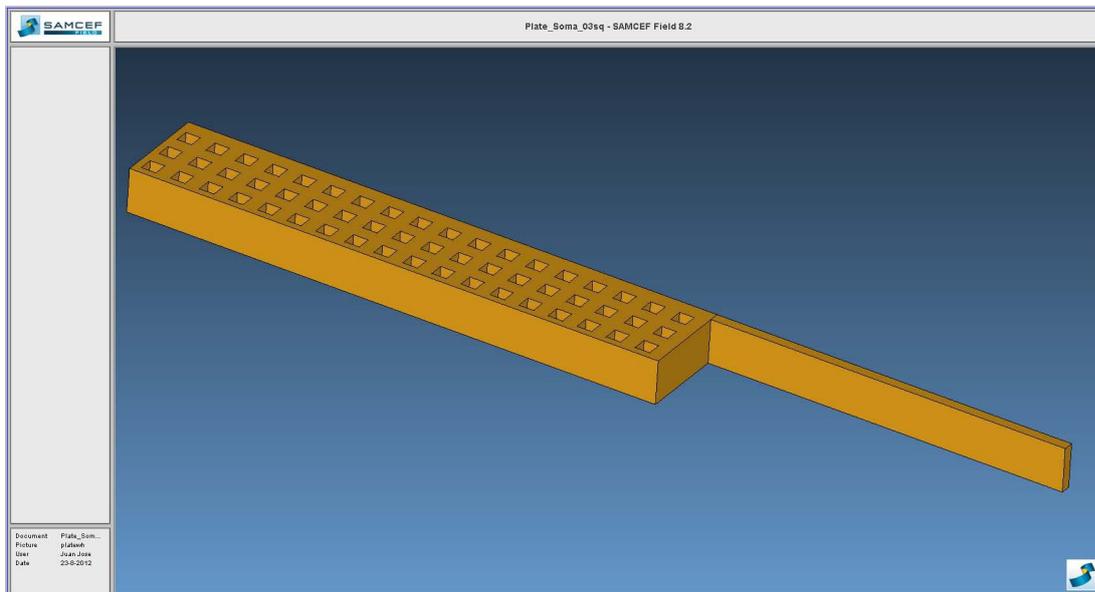


Figura 6.10: Modelo de placa perforada realizado en Samcef Field

La estructura es de polisilicio y sus características estructurales son: $E = 147 \text{ GPa}$, $\nu = 0.21$ y $\rho = 2 \times 10^{-15} \text{ kg}/\mu\text{m}^3$.

Descripción de la experiencia. El procedimiento para esta experiencia es similar al anterior. Se realiza utilizando una técnica de medición con un interferómetro óptico que permite la extracción de la función de respuesta de frecuencia (FRF) empírica. El software interno permite la evaluación de deformaciones cuasi-estáticas de la microestructura a través de una serie de mediciones sucesivas. Con el mapa de amplitud de

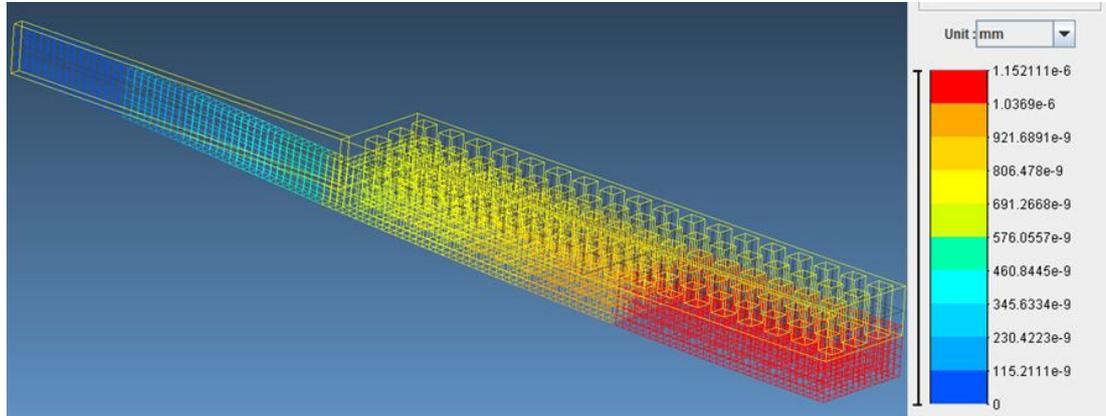


Figura 6.11: Deflexión de la placa por actuación electrostática.

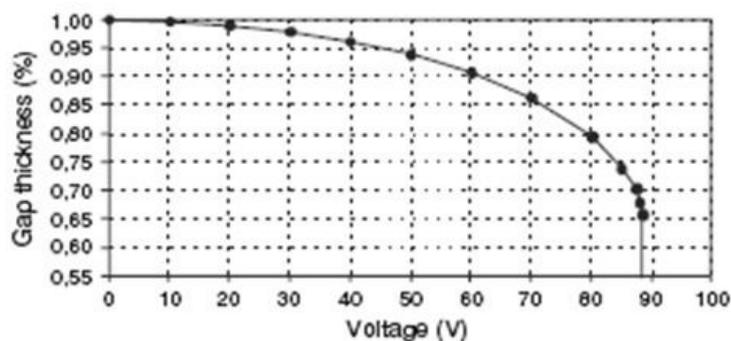
oscilación para la micro placa que vibran bajo actuación de CA se obtiene la correspondiente FRF.

Entonces, la experiencia consiste en actuar la placa a una señal alterna (AC) de 6V de amplitud con una señal de offset (DC) de 4V. Para analizar en un rango de frecuencias dado, se incrementa la frecuencia en pasos discretos, y para cada una de ellas se registra la amplitud de oscilación, y se obtiene la FRF correspondiente con el software que tiene incorporado el *microscopio interferométrico*. Este método de medición utiliza una fuente de luz monocromática roja, y las mediciones para registrar la amplitud de oscilación se realizan sobre un punto localizado de forma precisa sobre la placa suspendida, ubicado en el centro de la misma.

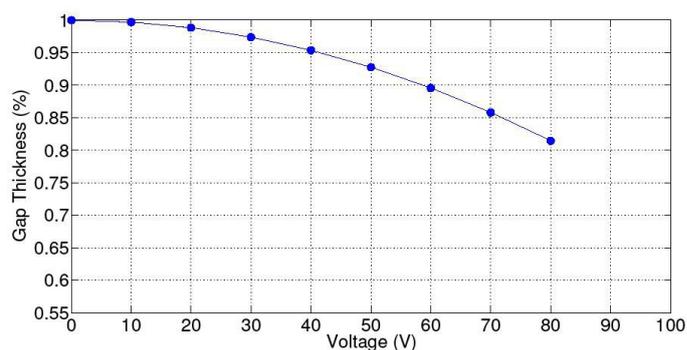
A partir de la FRF en un rango de frecuencias pequeño cercano a la frecuencia de resonancia, se determina una relación discreta amplitud-frecuencia. De esta relación se obtiene una función polinómica empírica de interpolación de grado seis, minimizando el error cuadrático. Con esta función interpolante se estima el pico máximo, y por consiguiente, la frecuencia de resonancia del sistema. A partir del valor máximo, se obtiene un ancho de banda de frecuencias determinado por decaimiento en 3dB del pico, es decir, las dos frecuencias equidistantes de la frecuencia de resonancia correspondientes a una amplitud de oscilación igual al cociente entre el valor del pico y $\sqrt{2}$. Se determina finalmente el *factor de calidad* de la estructura como el cociente entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda descrito anteriormente (Somà y De Pasquale, 2008).

Descripción de la simulación. Se modela un cuarto de la placa por simetría, como muestra la Fig. 6.10. El sistema se modela utilizando los pasos como en el caso anterior.

Primero se somete a la estructura a una diferencia de potencial DC para una deformación inicial (análisis estático). Mostramos la geometría con la deflexión en la Fig. 6.11. Con el objetivo de validar el análisis estático, la Figura 6.12 muestra el resultado de aplicar diferentes potenciales a la estructura, como describe Veijola et al. (2009).



(a) Experimental (figura del paper de Veijola et al. 2009)



(b) Simulación con Oofelie

Figura 6.12: Gráficas de la deflexión de la placa.

Seguidamente se realiza un análisis armónico como se describió en el caso anterior y se calcula la amplitud del desplazamiento en cada frecuencia. La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 6.13.

En la Tabla 6.2 se muestran los resultados obtenidos para calcular el factor de calidad. Se determina a partir de la curva de desplazamientos de la Fig. 6.13, estimando el ancho de banda alrededor de la frecuencia de resonancia, como se define en la descripción de la experiencia. El factor de calidad Q es entonces, como se mencionó anteriormente, Frecuencia de resonancia/ancho de banda.

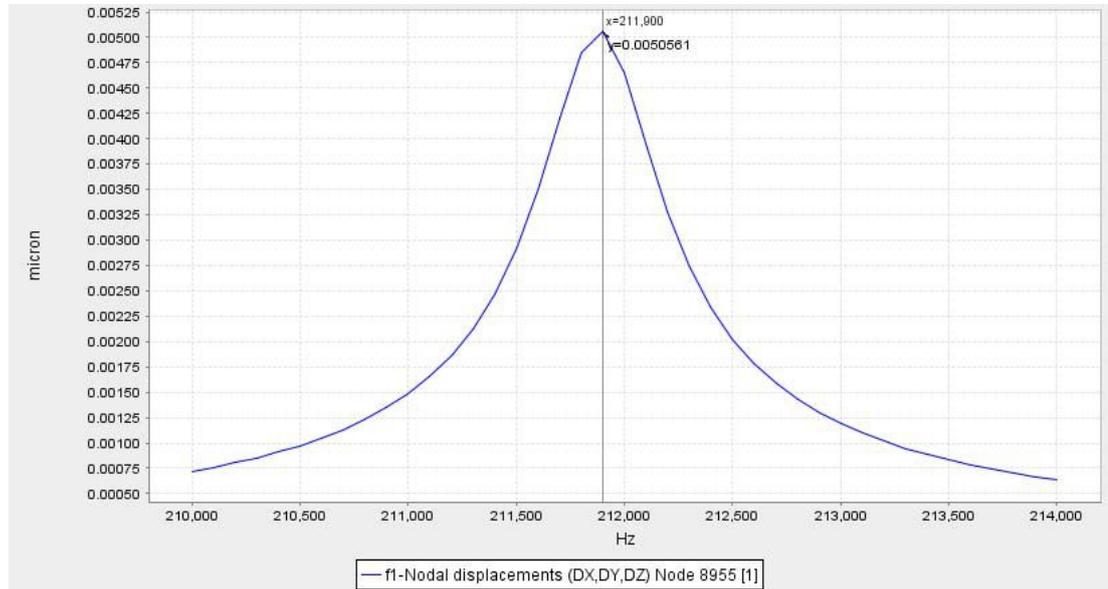


Figura 6.13: Amplitud de desplazamiento en función de la frecuencia

	Experimental	Simulación	Error %
Frec. [kHz]	201.64	211.90	5.1
Ancho de banda [kHz]	11.037	7.225	34.54
Factor de Calidad	18.269	29.33	60.55

Tabla 6.2: Datos obtenidos para la placa perforada

6.3.4. Análisis y discusión de resultados

Cantilever 175 μm : En general, los resultados obtenidos por la simulación en comparación con los resultados experimentales se consideran satisfactorios. Si analizamos el caso del cantilever (con y sin perforaciones), si bien las frecuencias de resonancia se sobrestiman, la amplitud de la velocidad se representa muy bien (ver Figuras [6.7](#) y [6.8](#)), al igual que el perfil de presiones que, como se indicó anteriormente, se reproducen los efectos de flujo de salida tanto en los contornos externos como en las perforaciones.

La diferencia en la frecuencia de resonancia tiene que ver con la dificultad que representa en la escala MEMS para determinar tanto las dimensiones del dispositivo como sus parámetros estructurales. También cabe mencionar que el empotramiento real puede ser muy diferente del simulado ([Rochus et al., 2012](#)). Para continuar con la simpleza de la geometría modelada, sólo modificaremos los parámetros nominales

del módulo de Young y de la densidad del material a fin de ajustar las frecuencias de resonancia. Los resultados se muestran, tanto para el caso sin perforaciones como en el caso en presencia de las mismas, utilizando en ambos casos los mismos valores del módulo de Young $E = 123.8\text{GPa}$ (Gutschmidt et al., 2009) y densidad $\rho = 2600\text{Kg/m}^3$.

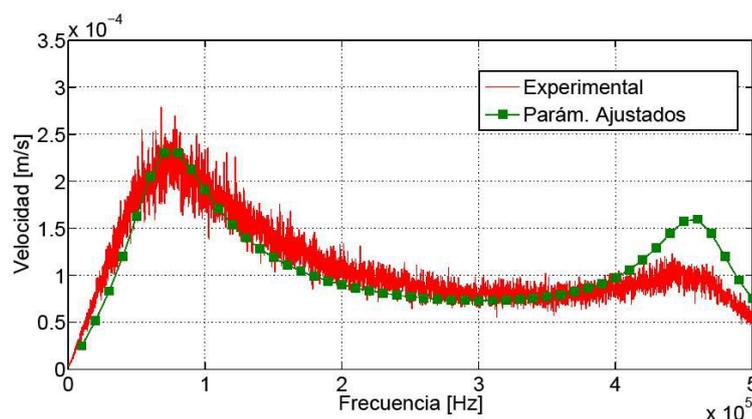


Figura 6.14: Cantilever sin perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros ajustados(línea continua con cuadrados).

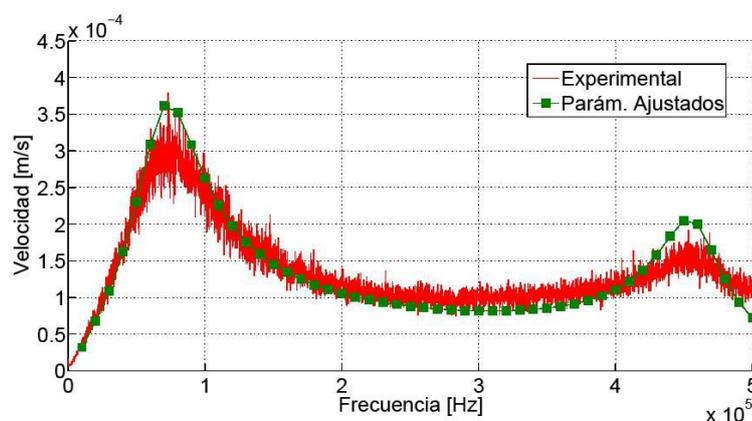


Figura 6.15: Cantilever con perforaciones: Datos experimentales (línea continua) y simulación con parámetros ajustados(línea continua con cuadrados).

Placa con 36×6 perforaciones: En el análisis estático, podemos observar que la estimación de la deformación de la placa en función de la diferencia de potencial aplicada es muy aceptable comparado con los resultados medidos en el trabajo de referencia. En cuanto al análisis armónico, si bien la frecuencia de resonancia obtenida no difiere mucho de la que se mide en la experiencia, el ancho de banda simulado es mucho menor que el medido. Esto nos arrastra un error bastante considerable al pretender determinar el

factor de calidad del dispositivo de muestra.

Capítulo 7

Conclusiones

Como se mencionó al final del Capítulo 6 los resultados tanto para simular dispositivos de prueba experimentales, como para comparar con otros modelos, resultaron satisfactorios. En este capítulo final se mencionarán los aportes realizados y objetivos cumplidos a modo de resumen de la tesis. Se finaliza con propuestas a futuro a partir de los logros alcanzados.

7.1. Conclusiones finales

Los sistemas micro-electromecánicos MEMS tienen mucha aplicabilidad en diferentes tecnologías, principalmente en telecomunicaciones. Al ser dispositivos muy pequeños, algunos efectos que en la macro-escala se pueden considerar despreciables, aquí se consideran importantes. Uno de ellos es el amortiguamiento con el aire que lo rodea. Otros campos que se consideran importantes para determinar el comportamiento del dispositivo son el termoelástico y el electromecánico.

Poder modelar estos efectos, y poder acoplar todos estos campos en un mismo modelo es el objetivo central de esta tesis. Por ello, en un principio, se estudió el comportamiento de cantilevers de prueba a fin de estimar las tensiones residuales que se generan en los mismos. Se considera que los dispositivos sufren tensiones residuales similares a las que están sometidos los cantilevers. Pudimos simular estos cantilevers con un modelo termoelástico, obteniendo resultados muy aproximados a datos experimentales brindados por el Centro Atómico Constituyentes de la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA).

Como tema central desde el punto de vista de la mecánica computacional, se realizó el modelado del flujo de estrujamiento en casos de movimiento entre placas paralelas en microrresonadores. Se demuestra que, en este caso, el flujo resultante se representa por la llamada ecuación de Reynolds no lineal. Se llega a esta ecuación a través de diferentes simplificaciones válidas en el contexto de microdispositivos, comenzando de la ecuación de Navier-Stokes tridimensional. Se mostraron soluciones de la Ecuación de Reynolds en el caso lineal, tanto extraídas de la bibliografía como así también resueltas en el desarrollo de esta tesis, por medio del método de funciones de Green.

También se desarrollaron modificaciones en el modelado del flujo de estrujamiento considerando los efectos debidos al flujo en el interior de perforaciones realizadas en la placa vibrante. Este modelo considera en cada perforación un circuito resistivo equivalente, teniendo en cuenta las resistencias hidráulicas y efectos en los extremos de la perforación. Los contornos libres de la placa se modelan también considerando una resistencia hidráulica por unidad de longitud.

Se pudieron validar los modelos (sin perforaciones y en presencia de ellas) para ejemplos de mediciones experimentales y resultados de otros modelos similares, logrando satisfacer el objetivo central de la tesis. En relación a los ejemplos experimentales, pudimos observar que el modelo se acopla bien a los otros campos (electrostático y estructural), comprobando la ventaja de programar en el Software Oofelie.

Más específicamente, en estos ejemplos se realizaron dos análisis. El primero por medio de un modelo electro-mecánico, que resuelve un sistema acoplado entre el campo de desplazamientos y el campo eléctrico. Se mostraron resultados del modelo resuelto por medio de un análisis estático. Este primer análisis se realiza simulando la actuación del sistema por medio de un potencial eléctrico continuo (DC). El desplazamiento obtenido se utiliza como estado inicial para el segundo análisis que es dinámico. Este segundo análisis es armónico, barriendo un intervalo de frecuencias, donde se considera el sistema acoplado fluido-electro-mecánico. Se simula aquí el comportamiento vibratorio del dispositivo al ser sometido a un potencial alterno (AC).

Los resultados obtenidos proporcionaron información muy valiosa. El amortiguamiento en el caso de los cantilevers se pudo modelar satisfactoriamente, a pesar de que se pudo evidenciar que los parámetros estructurales proporcionados por el trabajo de referencia pueden no ser confiables. También se considera que el empotramiento ideal simulado no es el más apropiado. Pero desde el punto de vista del modelo, los resultados

fueron muy satisfactorios. Para el caso de la microplaca con 36×6 perforaciones, los resultados reprodujeron satisfactoriamente el factor de calidad. Si bien se obtienen buenos resultados para la estimación de la frecuencia de resonancia, el ancho de banda obtenido es menor al reportado en el trabajo de referencia. Quedó pendiente un análisis más detallado de este resultado, que puede tener que ver con la malla de elementos finitos utilizada. Quizás un refinamiento de la misma para modelar mejor la separación entre perforaciones nos proporcionaría mayor información de la convergencia del campo de presiones para analizar si el modelo propuesto es válido en el contexto de este ejemplo.

En cuanto a la comparación con otros modelos, se muestra que la ventaja de no depender de un modelo de celdas (es decir, la independencia de la distribución de perforaciones) como así también del cálculo 3D para determinar los parámetros de elongación efectiva posiciona ventajosamente a nuestro modelo para ser aplicado a otro tipo de geometrías. La formulación diferencial propuesta como base para el modelo es general, con condiciones de contorno mixtas, sin necesidad de modificar con algún término extra a la ecuación diferencial no lineal de Reynolds.

7.2. Trabajo a Futuro

Como trabajo a futuro, se propone seguir investigando el modelo de perforaciones, para determinar con mejor aproximación los parámetros de elongación efectiva, en base a las dimensiones características del sistema. También es posible mejorar la condición de contorno en las perforaciones perfeccionando la aproximación utilizada de considerar un valor promedio de la presión en todos los nodos de la perforación.

Este modelo se puede aplicar y acoplar a otros campos actuantes en dispositivos MEMS. El siguiente paso natural sería aplicarlo a ejemplos de dispositivos que tengan alguna aplicación diferente a los dispositivos de prueba que mostramos en esta tesis. En ese sentido, y en el marco de una instancia posdoctoral, se propone continuar el desarrollo del software de simulación por elementos finitos, para mejorar la capacidad de predicción. En particular, se aplicará el mismo a la resolución del modelado de microosciladores mecánicos de silicio para uso como sensores de presión. Se estudiarán los efectos del amortiguamiento por flujo del fluido circundante en torno a la placa vibrante en torsión. Se analizarán los alcances del modelo basado en la ecuación de Reynolds para representar estos efectos, y las alteraciones que pueden presentarse por:

- Perturbaciones grandes al movimiento de rotación.

- Efectos que puedan generarse cuando el movimiento oscilatorio se realice en torno a una posición de giro no nula, por defectos de construcción y/o operación del dispositivo.
- Efecto de perforaciones en la placa y su influencia sobre el factor de calidad.

Se estudiará además el funcionamiento en micromagnetómetros, en los cuales el campo magnético actuante genere corrientes inducidas en la placa oscilante conductora. Se tratará de representar este efecto, y se analizará su eventual influencia en el funcionamiento del dispositivo.

Bibliografía

Aróztegui W.J., Osio J.R., Rapallini J.A., Ocampo J.M.F., y Quijano A.A. RF MEMS: conceptos, evolución y mercado. *Primeras Jornadas de Investigación y Transferencia*, 2011. [7](#)

Bao M. *Analysis and design principles of MEMS devices*. Elsevier, 2005. [20](#)

Bao M. y Yang H. Squeeze film air damping in MEMS. *Sensors and Actuators*, A 136:3–27, 2007. [18](#), [21](#), [24](#), [32](#), [35](#), [41](#)

Bao M., Yang H., Sun Y., y French P. Modified Reynolds' equation and analytical analysis of squeeze-film air damping of perforated structures. *Micromech. Microeng.*, 13:795–800, 2003a. [3](#), [50](#)

Bao M., Yang H., Sun Y., y Wang Y. Squeeze-film air damping of thick hole-plate. *Sensors and Actuators*, A 108:212–217, 2003b. [3](#)

Berli C. y Cardona A. On the calculation of viscous damping of microbeam resonators in air. *Journal of Sound and Vibration*, 327:249–253, 2009. [18](#), [21](#)

Chipot M. y Luskin M. The Compressible Reynolds Lubrication Equation. In *Metastability and Incompletely Posed Problems*, volumen 3 de *The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, páginas 61–75. Springer New York, 1987. [21](#), [24](#)

Darling R., Hivick C., y Xu J. Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a Green's function approach. *Sensors and Actuators*, A 70:32–41, 1998. [25](#), [26](#), [27](#), [28](#), [54](#)

De Los Santos H.J., Fischer G., Tilmans A.C., y Van Beek J.T.M. RF MEMS for ubiquitous wireless connectivity: Part 1 - Fabrication. *Microwave Magazine*, 5:36–49, 2004a. [13](#)

De Los Santos H.J., Fischer G., Tilmans A.C., y Van Beek J.T.M. RF MEMS for ubiquitous wireless connectivity: Part 2 - Application. *Microwave Magazine*, 5:50–65, 2004b. [8](#)

De Pasquale G. y Veijola T. Comparative numerical study of FEM methods solving gas damping in perforated MEMS devices. *Microfluid Nanofluid*, 5:517–528, 2008. [3](#), [50](#), [61](#), [63](#)

De Pasquale G., Veijola T., y Somà A. Modelling and validation of air damping in perforated gold and silicon MEMS plates. *Micromech. Microeng.*, 20:015010(12pp), 2010. [45](#), [61](#)

- Gad-el-Hak M. The fluid mechanics of microdevices - The Freeman scholar lecture. *Journal of Fluid Eng.*, 121:5–33, 1999. [20](#)
- Gomez Barroso J.J., Berli C., y Cardona A. Modelado del flujo de escurreamiento en Microresonadores Perforados. *AMCA Mecanica Computacional*, XXXI:763–769, 2012. [4](#)
- Gomez Barroso J.J., Brüls O., Berli C., y Cardona A. Modelling of the squeeze film air damping in MEMS. *AMCA Mecanica Computacional*, XXVIII:519–527, 2009. [4](#), [18](#), [19](#), [34](#), [38](#)
- Gomez Barroso J.J., Cardona A., y Berli C. Modelado y simulación del amortiguamiento viscoso en microplacas perforadas. *AMCA Mecanica Computacional*, XXXII:1427–1435, 2013. [4](#), [53](#), [57](#), [63](#)
- Gutschmidt S., Rochus V., y Golinval J.C. Static and dynamic experimental investigations of a microelectromechanical cantilever in air and vacuum. In *Thermal, Mechanical and Multi-Physics simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, 2009. EuroSimE 2009. 10th International Conference on. IEEE*, 2009. [68](#), [76](#)
- Homentcovschi D. y Miles R. Viscous damping and spring force in periodic perforated planar microstructures when the Reynolds' equation cannot be applied. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127 No3:1288–1299, 2010. [3](#), [50](#)
- Judy J.W. Microelectromechanical systems (MEMS): fabrication, design and applications. *Smart Mater. Struct.*, 10:1115–1134, 2001. [1](#)
- Kang T., Kim J., Kim J., Hwang K., Lee B., Baek C., Kim Y., Kwon D., Lee H., y Kim Y. Deformation characteristics of electroplated MEMS cantilever beams released by plasma ashing. *Sensors and Actuators, A* 148:407–415, 2008. [10](#)
- Ko W. Trends and frontiers of MEMS. *Sensors and Actuators, A* 136:62–67, 2007. [1](#)
- Kwok P.Y., Weinberg M.S., y Breuer K.S. Fluid effects in vibrating micromachined structures. *Journal of Microelectromechanical Systems*, No4 Vol.5:770–781, 2005. [50](#)
- Lepage S. *Stochastic Finite Element Method for the Modeling of Thermoelastic Damping in Micro-Resonators*. Tesis Doctoral, Vibrations et Identification des Structures, Département d'Aérospatiale et Mécanique. Université de Liège, Liège, 2006. [17](#)
- Mohite S.S., Kesari H., Sonti V.R., y Pratap R. Analytical solutions for the stiffness and damping coefficients of squeeze films in MEMS devices with perforated back plates. *Micromech. Microeng.*, 15:2083–2092, 2005. [3](#), [50](#)

- MSA-400 Micro System Analyzer. *Measuring 3-D MEMS Dynamics and Topography*. Polytec, 2005. [68](#)
- Narducci Marín M.S. *Modelado y desarrollo de microcantilevers resonantes para sensores*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2010. [13](#)
- Nathanson H.C., Newell W.E., Wickstrom R.A., y Ransford Davis, JR J. The resonant gate transistor. *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 161, no. 3:117–133, 1967. [10](#)
- Nayfeh A.H. y Younis M.I. A new approach to the modeling and simulation of flexible microstructures under the effect of squeeze-film damping. *Micro-mech. Microeng.*, 14:170–181, 2004. [3](#), [41](#)
- Newell W. Miniaturization of tuning forks. *Science*, 161:1320–1326, 1968. [18](#)
- Nigro S., Pagnotta L., y Pantano M.F. Analytical and numerical modeling of squeeze-film damping in perforated microstructures. *Microfluid Nanofluid*, 12:971–979, 2012. [50](#)
- Pandey A.K. y Pratap R. Effect of flexural modes on squeeze film damping in MEMS cantilever resonators. *Micro-mech. Microeng.*, 17:2475–2484, 2007. [30](#), [41](#)
- Pandey A.K. y Pratap R. A comparative study of analytical squeeze film damping models in rigid rectangular perforated MEMS structures with experimental results. *Microfluid Nanofluid*, 4:205–218, 2008. [3](#), [50](#)
- Pandey A.K., Pratap R., y Chaub F.S. Analytical solution of the modified Reynolds equation for squeeze film damping in perforated MEMS structures. *Sensors and Actuators, A* 135:839–848, 2007. [3](#), [26](#), [27](#), [29](#)
- Pratap R., Mohite S., y Pandey A.K. Squeeze film effects in MEMS devices. *J. Indian Institute Sci*, 87:75–94, 2007. [32](#)
- Rangra K.J. *Design, Fabrication And Characterization of Electrostatic Low Actuation Voltage RF MEMS Switches*. Tesis Doctoral, International Doctorate School in Information and Communication Technologies DIT - University of Trento, Trento, 2005. [10](#)
- Rao S.S. *Mechanical Vibrations. 5th Edition*. Pearson, 2004. [30](#)
- Rochus V. *Finite element modelling of strong electro-mechanical coupling in MEMS*. Tesis Doctoral, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Liège, 2006. [vii](#), [8](#), [14](#), [64](#), [66](#)
- Rochus V., Gutschmidt S., Cardona A., y Geuzaine C. Electro-mechano-fluidic modeling of microsystems using finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48 No2:355–258, 2012. [viii](#), [61](#), [67](#), [68](#), [75](#)

- Rochus V., Gutschmidt S., Golinval J.C., Saint-Mard M., Heusdens B., Haudry F., y Destiné J. High vibration sensors: Modelling, design and integration. In *Thermal, Mechanical and Multi-Physics simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, 2009. EuroSimE 2009. 10th International Conference on*. IEEE, 2009. [68](#)
- Rochus V., Rixen D.J., y Golinval J.C. Monolithic modeling of electro-mechanical coupling in micro-structures. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 65/4:461–493, 2006. [65](#)
- Sharipov F. y Seleznev V. Data on internal rarefied gas flows. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 27(3):657–706, 1998. [59](#)
- Somà A. y De Pasquale G. Numerical and experimental comparison of MEMS suspended plates dynamic behaviour under squeeze film damping effect. *Analog Integr. Circuits Signal Process*, 57:213–224, 2008. [3](#), [61](#), [72](#), [73](#)
- Torrejón Yuste .J. Diseño, fabricación y caracterización de un sensor de caudal para aplicaciones PCB-MEMS. 2011. Proyecto Fin de Carrera Ingeniero Industrial. [7](#)
- Veijola T. Compact models for squeezed-film dampers with inertial and rarefied gas effects. *Micromech. Microeng.*, 14:1109–1118, 2004. [3](#)
- Veijola T. Analytic damping model for a square perforation cell. *Proceedings of the 9th International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, 3:554–557, 2006a. [3](#), [50](#), [52](#), [53](#), [58](#), [59](#), [61](#)
- Veijola T. Analytic damping model for an MEM perforation cell. *Microfluid Nanofluid*, 2:249–260, 2006b. [3](#), [50](#), [53](#), [58](#), [59](#), [61](#)
- Veijola T., De Pasquale G., y Somà A. Experimental validation of compact damping models of perforated MEMS devices. *Microsystem Technologies*, 15:1121–1128, 2009. [3](#), [74](#)
- Veijola T., Kuisma H., Lahdenperä J., y Ryhänen T. Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer. *Sensors and Actuators, A* 48:239–248, 1995. [21](#)
- Veijola T. y Råback P. Methods for solving gas damping problems in perforated microstructures using a 2d finite-element solver. *Sensors*, 7:1069–1090, 2007. [50](#), [52](#), [53](#)
- White F.M. *Viscous Fluid Flow. 2nd Edition*. McGraw Hill, 1974. [19](#)
- Ye W., Wang X., Hemmert W., Freeman D., y White J. Air Damping in laterally oscillating Microresonators: A numerical and experimental study. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 12 No5:557–566, 2003. [18](#)

Zhang C., Xu G., y Jiang Q. Characterization of the squeeze film damping effect on the quality factor of a micro-beam resonator. *Micromech. Microeng.*,

14:1302–1306, 2004. [27](#) [41](#)

Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method*, volumen II. McGraw Hill, 1991. [38](#)